Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année $2009-2010$

Algèbre S4

Correction de quelques exercices de la feuille 4

Application linéaire adjointe et réduction des matrices symétriques et orthogonales .

1. **Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E tel que pour tout $x \in E$, $< x, f(x) >= 0$. Montrer que $f^* = -f$, puis que $E = kerf \oplus Imf$ et $kerf \perp Imf$.**
   Pour tous $x, y \in E$, $< f(x+y), x+y >= 0$, or
   $< f(x+y), x+y >=< f(x), x > + < f(y), y > + < f(x), y > + < y, f(x) >$ ce qui entraîne que $f^* = -f$.
   Si $x \in kerf$ alors pour tout $y \in Imf$, il existe z tel que $y = f(z)$, on a :
   $< x, y >=< x, f(z) >=< f(x), z >= 0$ donc $x \in (Imf)^{\perp}$.
   De plus par le théorème du rang il y'a égalité des dimensions donc $kerf = (Imf)^{\perp}$. Ce qui prouve que $kerf$ et (Imf) sont supplémentaires et orthogonaux.

2. **Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E tel que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| \leq 1$. Montrer que $E = ker(f - Id) \oplus Im(f - Id)$ et $ker(f - Id) \perp Im(f - Id)$, puis que $(Imu)^{\perp} = keru = keru^*$.**

   Commençons par montrer que $ker(f - Id)$ et $Im(f - Id)$ sont orthogonaux. Soit $x \in ker(f - Id)$ et $y \in Im(f - Id)$. Alors $f(x) = x$ et il existe $z \in E$ tel que $y = f(z) - z$. Notamment pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, on a :
   $$y = f(z + \lambda x) - (z + \lambda x),$$
   donc
   $$1 \geq \|f(z + \lambda x)\|^2 = \|y + z + \lambda x\|^2 = \|z + \lambda x\|^2 + 2\lambda < x, y > + 2 < z, y > + \|y\|^2.$$

   En divisant par λ et en faisant tendre λ vers $\pm\infty$ on a : $< x, y >= 0$. Ce qui entraîne que les deux sous espaces vectoriels sont orthogonaux.
   Ensuite montrons qu'ils sont supplémentaires. Ceci revient à montrer que $E = ker(f - Id) + Im(f - Id)$ et $ker(f - Id) \cap Im(f - Id) = \{0\}$. La deuxième condition est immédiate puisqu'ils sont orthogonaux. Pour montrer la première on utilise le théorème du rang d'une part et d'autre part du fait que $(Im(f - Id)) + ker(f - Id) \subset E$.
   Montrons maintenant la dernière égalité. D'après ce qui précède $(Imu)^{\perp} = keru$. Montrons que $keru^* = (Imu)^{\perp}$:
   $$x \in keru^* \Leftrightarrow u^*(x) = 0 \Leftrightarrow \forall y \in E, < u^*(x), y >= 0.$$
   Puis que $< u^*(x), y >=< x, u(y) >$ on a :
   $$x \in keru^* \Leftrightarrow \forall y \in E, < x, u(y) >= 0 \Leftrightarrow x \in (Imu)^{\perp}.$$

3. **On considère l'espace vectoriel R^3 muni du produit scalaire canonique, et $F = \{(x_1, x_2, x_3 \in R^3, x_1 - x_2 = 0\}$.**

   (a) **Préciser une base orthonormale de F.**

   (b) **Déterminer $F^\perp$, l'orthogonal de F. Préciser une base orthogonale de $F^\perp$.**

   (c) **Donner l'expression de p_F, la projection orthogonale de F. Préciser les images par p_F des vecteurs de la base définie précédemment. Déterminer l'application adjointe de p_F.**

   (d) **Pour $x \in R^3$ donné, calculer $d(x, F)$.**

(a) On trouve aisément que $F = vect\{u_1, u2\}$ où $u_1 = (1, 1, 0)$ et $u_2 = (0, 0, 1)$. Comme ces deux vecteurs sont libres donc c'est une base de F. Soit $\{e_1, e_2\}$ cette base orthonormale obtenue à partir de la base $\{u_1, u_2\}$ à l'aide du procédé de Gram-Schmidt. On obtient que $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$ et $e_2 = (0, 0, 1)$.
(b) Détermination de $F^\perp$: $F^\perp = \{X = (x_1, x_2, x_3) \in R^3, < X, e_1 >=< X, e_2 >= 0\}$ donc $F^\perp = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3, x_1 + x_2 = 0, x_3 = 0\}$. Une base orthogonale de $F^\perp$ est le vecteur $e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$.
(c) L'expression de p_F: $\forall X \in R^3, p_F(X) =< X, e_1 > e_1+ < X, e_2 > e_2 = (\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_1+x_2}{2}, x_3)$. Les images des vecteurs de la base: $p_F(e_1) = e_1$ et $p_F(e_2) = e_2$ car e_1 et e_2 appartiennent à F et $p_F(e_3) = 0$ car e_3 appartient à $F^\perp$. On sait que dans le cas euclidien, dans une base orthonormale la matrice de l'adjoint est la transposée de la matrice, alors $(p_F)^* = p_F$ puis que la matrice de la projection est symétrique.
(d) Calcul de la distance $d(x, F)$, $x \in R^3$: $d^2(x, F) = \|x - p_F(x)\|^2 = \frac{(x_1-x_2)^2}{2}$

4. **Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E tel que $f^2 = Id$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes**

   (a) **f est une symétrie orthogonale.**

   (b) **f est symétrique ($f^* = f$ c'est à dire pour tout $x, y \in E, < f(x), y >=< x, f(y) >$).**

   (c) **f est une transformation orthogonale $i.e$ préserve le produit scalaire : $< f(x), f(y) >=< x, y >$.**

Pour montrer ces équivalences on montrera que $a) \Rightarrow b) \Rightarrow c) \Rightarrow a)$.

1. Supposons $a)$ vrai et montrons $b)$. Soit E et G deus sous espaces supplémentaires dans E : tout vecteur $x \in E$ s'écrit de manière unique $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F$ et $x_2 \in G$. La symétrie orthogonale sur F par rapport à G est l'endomorphisme de E qui à tout $x \in E$ associe le vecteur $x_1 - x_2$. Soit f cette symétrie orthogonale donc $f(x) = x_1 - x_2$. Montrons que f est symétrique $i.e$ que $f = f^*$. Soient $x, y \in E$ tels que $x = x_1 + x_2$ et $y = y_1 + y_2$ avec $x_1, y_1 \in F$ et $x_2, y_2 \in G$. Calculons $< f(x), y >$ et $< x, f(y) >$:

$$< f(x), y >=< x_1 - x_2, y_1 + y_2 >=< x_1, y_1 > + < x_1, y_2 > - < x_2, y_1 > - < x_2, y_2 >$$

d'une part, et

$$< x, f(y) >=< x_1 + x_2, y_1 - y_2 >=< x_1, y_1 > - < x_1, y_2 > + < x_2, y_1 > - < x_2, y_2 >$$

d'utre part. Mais $< x_1, y_2 >=< x_2, y_1 >= 0$ car F et G sont orthogonaux,// donc $< f(x), y >=< x, f(y) >$. Puis que $\forall x, y \in E, < f(x), y >=< x, f^*(y) >$ on a $f = f^*$.

2. Supposons $b)$ vrai $i.e$ que $f = f^*$ et montrons $c)$. Pour cela calculons $< f(x), f(y) >$:

$$< f(x), f(y) >=< x, f^*(f(y)) >=< x, f^2(y) >=< x, y >$$

car $f = f^*$ et $f^2 = Id$.
3. Supposons $c)$ vrai et montrons $a)$. Ceci est immédiat par définition de la symétrie.

5. **Soit** $(E, < .,. >)$ **un espace préhilbertien et soit** $f : E \to E$ **une application telle que** $f(0) = 0$ **et** $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$ **pour tout** $x, y \in E$. **Montrer que** $< f(x), f(y) >=< x, y >$ **pour tout** $x, y \in E$. **En déduire que** f **est une application linéaire orthogonale.**

   On sait que
   $$\|f(x) - f(y)\|^2 =< f(x) - f(y), f(x) - f(y) >= \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2 < f(x), f(y) >$$
   d'une part,
   $$\|x - y\|^2 =< x - y, x - y >=< x, x > -2 < x, y > + < y, y >= \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2 < x, y >$$
   d'autre part.
   Comme $\|f(x) - f(y)\|^2 = \|x - y\|^2$, on obtient que $< f(x), f(y) >=< x, y >$.
   Montrons que f est une application linéaire orthogonale. Pour cela calculons pour tout $x, y \in E$ l'expression $\|f(x + \lambda y) - f(x) - \lambda f(y)\|^2$. En utilisant ce qui précède on trouve que cette expression est nulle. Ce qui prouve la linéarité.

6. **Soit** $A = (a_{ij})_{1,j \leq n}$ **une matrice orthogonale. Montrer que**
   $$| \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} | \leq n.$$
   ***Indication*: Utiliser le vecteur** $u = (1, 1, ..., 1)^t$.
   Au est une vecteur colonne dont la i-ieme composante vaut $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$. De plus comme A est une matrice orthogonale, on a $\|Au\| = \|u\| = \sqrt{n}$ (i.e conservation de la norme). Puis que $| < u, Au > | = | \sum_{i,j} a_{ij}|$, on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour conclure.

7. **Soit** $X = (x_1, ..., x_n)^t$ **un vecteur non nul de** R^n**, où** $n \in N^*$ **et soit la matrice** $M = X.X^t$.
   (a) **Déterminer le rang de la matrice** M **(on pourra chercher le noyau de l'endomorphisme de** R^n **représenté par** M **).**
   (b) **En déduire les valeurs propres de** M **et les sous-espaces propres associés.**
   (c) **Calculer** M^n**.**

   (a) Pour trouver le rang de M, On détermine la dimension du noyau. Soit $y \in R$ tel que $MY = 0$.On trouve un système à n équations équivalentes. Donc $dimker(M) = n - 1$ ce qui entraîne que le rang de M est 1.
   (b) Comme $MX = (\Sigma_{i=1}^{n} a_i^2)X$, alors X est vecteur propre associée à la valeur propre $(\Sigma_{i=1}^{n} a_i^2)$. Du fait que $dimker(M) = n - 1$, 0 est valeur propre d'ordre $n - 1$. Finalement tous les espaces propres ont la bonne dimension: A est diagonalisable.
   (c) En multipliant l'expression $MX = (\Sigma_{i=1}^{n} a_i^2)X$ par X^t à droite on obtient $M^2 = (\Sigma_{i=1}^{n} a_i^2)M$. Donc $M^n = (\Sigma_{i=1}^{n} a_i^2)^{n-1}M$

8. **Soit** $A \in M_n(\mathbf{R})$ **une matrice symétrique telle que** $A^3 + A = 0$. **Montrer qu'alors** $A = 0$.
   Comme A est symétrique, alors elle est diagonalisable c'est à dire qu'il existe une matrice P inversible telle que $A = PDP^{-1}$ où D est une matrice diagonale constituée des vecteurs propres

de A et toutes les valeurs propres sont réelles. Soit λ_i, $i = 1, n$ les valeurs propres de A. En remplaçant A par PDP^{-1} l'équation devient,

$$PD^3P^{-1} + PDP^{-1} = 0$$

En multipliant par P^{-1} à gauche et en multipliant par P à droite, on obtient $D^3 + D = 0$ qui est équivalent $\lambda_i^3 + \lambda_i = 0$, pour tout $i = 1, n$. La seule valeur propre réelle qu'on obtient après la résolution de cette équation est $\lambda_i = 0, i = 1, n$. Ce qui entraîne que $D = 0$ donc $A = 0$.