Première Année Licence M.A.S.H.S. 2018 – 2019

Probabilités

Contrôle Continu 1, Mars 2019

Examen de 1h30. Tout document ou calculatrice est interdit.

Exercice 1 (Sur 10 points)

On confie à un joueur un dé truqué dont on dit que le 6 sort plus qu'avec un dé équilibré. Il veut savoir si cela est vrai. A cet effet il effectue des lancers les uns après les autres et note le nombre d'essais nécessaires pour obtenir un 6. Il obtient ainsi:

Nombre d'essais pour obtenir 6	Effectifs
1	23
2	18
3	12
4	8
5	8
6	9
7	2
8	3
9	6
10	4
$11 \leq \cdot \leq 16$	4

1. Représenter la répartition de ces données par un diagramme en bâtons **(0.5pts)** et le polygône des fréquences cumulées **(1.5pts)**.
2. Déterminer la médiane empirique **(1pt)** ainsi que la moyenne **(1pt)**.
3. Si on suppose que le dé est équilibré et si on note X le nombre d'essais nécessaires pour obtenir 6, montrer en justifiant que $\mathbb{P}(X = k) = \frac{5^{k-1}}{6^k}$ pour tout $k \in \mathbf{N}^*$ **(2pts)**.
4. On a $(5/6)^4 \simeq 0.48$. En déduire que $\mathbb{P}(X \leq 4) > 0.5$ **(2.5pts)** alors que $\mathbb{P}(X \leq 3) < 0.5$ **(1pt)**. Comparez ce résultat avec ceux obtenus avec le dé. Peut-on en conclure que le dé est truqué **(0.5pts)**?

Exercice 2 (Sur 6 points)

On suppose qu'il y a globalement une proportion x de tricheurs dans la population globale (ici un tricheur sera considéré comme celui qui gagne à tous coups). Si on note T l'évènement "être un tricheur", qu'en déduisez vous quant à $\mathbb{P}(T)$ **(0.5pts)**? Vous jouez à pile ou face avec un autre joueur. Il parie sur pile, lance la pièce, et obtient pile. Montrer que la probabilité qu'il soit un tricheur est de $2x/(x+1)$ **(5.5pts)**.

Exercice 3 (Sur 8 points)

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace de probabilité où Ω est un ensemble fini de cardinal supérieur ou égal à 2. On suppose qu'il existe $\omega \in \Omega$ tel que $0 < \mathbb{P}(\{\omega\}) < 1$ et $C \in \mathcal{P}(\Omega)$ tel que $0 < \mathbb{P}(C)$.

1. On note $\mathbb{P}_1 : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbf{R}$ l'application telle que pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}_1(A) = (\mathbb{P}(A))^2$. Montrer que $\mathbb{P}_1$ n'est pas une mesure de probabilité **(3pts)**.
2. Montrer que l'application $\mathbb{P}_2 : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbf{R}$ vérifiant $\mathbb{P}_2(A) = \mathbb{P}(A \cap C)/\mathbb{P}(C)$ pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, est une mesure de probabilité. Que peut-on dire si $\mathbb{P}(C) = 1$ **(3pts)**?
3. L'application $\mathbb{P}_3 : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbf{R}$ telle que pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}_3(A) = \mathbb{P}(A \cup C)$ est-elle une mesure de probabilité **(2pts)**?