Première Année Licence M.A.S.H.S. 2018 – 2019

Probabilités

Contrôle Continu 1, Mars 2019

Examen de 1h30. Tout document ou calculatrice est interdit.

Exercice 1 (Sur 10 points)

On confie à un joueur un dé truqué dont on dit que le 6 sort plus qu'avec un dé équilibré. Il veut savoir si cela est vrai. A cet effet il effectue des lancers les uns après les autres et note le nombre d'essais nécessaires pour obtenir un 6. Il obtient ainsi:

Nombre d'essais pour obtenir 6	Effectifs
1	23
2	18
3	12
4	8
5	8
6	9
7	2
8	3
9	6
10	4
$11 \leq \cdot \leq 16$	4

1. Représenter la répartition de ces données par un diagramme en bâtons **(0.5pts)** et le polygône des fréquences cumulées **(1.5pts)**.
2. Déterminer la médiane empirique **(1pt)** ainsi que la moyenne **(1pt)**.
3. Si on suppose que le dé est équilibré et si on note X le nombre d'essais nécessaires pour obtenir 6, montrer en justifiant que $\mathbb{P}(X=k) = \frac{5^{k-1}}{6^k}$ pour tout $k \in \mathbf{N}^*$ **(2pts)**.
4. On a $(5/6)^4 \simeq 0.48$. En déduire que $\mathbb{P}(X \leq 4) > 0.5$ **(2.5pts)** alors que $\mathbb{P}(X \leq 3) < 0.5$ **(1pt)**. Comparez ce résultat avec ceux obtenus avec le dé. Peut-on en conclure que le dé est truqué **(0.5pts)**?

Proof.

1. Faire les deux graphes...
2. Grâce au polygône des fréquences cumulées, on obtient une médiane ayant pour valeur 3.
   La moyenne empirique vaut: $\frac{1}{97}\big((1*23)+(2*18)+(3*12)+(4*8)+(5*8)+(6*9)+(7*2)+(8*3)+(9*6)+(10*4)+(13.5*4)\big) \simeq 4.2$.
3. Si $X = k$, avec $k \in \mathbf{N}^*$, alors il y a eu $(k-1)$ premiers essais où le 6 n'est pas apparu, puis un 6 au k-ième essai. Or, la probabilité de ne pas avoir 6 lors d'un lancer est 5/6. De plus, on suppose que les essais sont tous indépendants les uns les autres. On en déduit donc que $\mathbb{P}(X=k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{5^{k-1}}{6^k}$.
4. On a $\mathbb{P}(X \leq 4) = \sum_{k=1}^{4} \mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{4}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} = \frac{1}{6}\frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^4}{1-\left(\frac{5}{6}\right)}$ grâce à la formule de la somme des termes d'une suite géométrique. Ainsi, $\mathbb{P}(X \leq 4) = \sum_{k=1}^{4} \mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{4}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \simeq 0.52$.
   On déduit alors que $\mathbb{P}(X \leq 3) \simeq 0.52 - (5/6)^4/5 \simeq 0.42 < 0.5$.
   On trouve donc une médiane théorique de 4 pour le nombre d'essais jusqu'à apparition du premier 6. Cela est un peu plus que les résultats empiriques obtenus plus haut, mais on ne peut rien en déduire (il faudrait construire un test pour essayer de conclure).

□

Exercice 2 (Sur 6 points)

On suppose qu'il y a globalement une proportion x de tricheurs dans la population globale (ici un tricheur sera considéré comme celui qui gagne à tous coups). Si on note T l'évènement "être un tricheur", qu'en déduisez vous quant à $\mathbb{P}(T)$ **(0.5pts)**? Vous jouez à pile ou face avec un autre joueur. Il parie sur pile, lance la pièce, et obtient pile. Montrer que la probabilité qu'il soit un tricheur est de $2x/(x+1)$ **(5.5pts)**.

Proof. 1. On définit les évènements suivants: T: être tricheur, $\overline{T}$: ne pas être tricheur, G gagner au jeu, P perdre au jeu. On a alors $\mathbb{P}(T) = x$ et donc $\mathbb{P}(\overline{T}) = 1 - x$.
On sait aussi que pour un non-tricheur: $\mathbb{P}(G \mid \overline{T}) = 1/2 = \mathbb{P}(P \mid \overline{T})$ en supposant naturellement que la pièce est équilibrée, alors que $\mathbb{P}(G \mid T) = 1$ et $\mathbb{P}(P \mid T) = 0$ en supposant donc que ce tricheur est vraiment bon tricheur.
On recherche $\mathbb{P}(T \mid G)$. Par la formule de Bayes,

$$\mathbb{P}(T \mid G) = \frac{\mathbb{P}(G \mid T)\mathbb{P}(T)}{\mathbb{P}(G \mid T)\mathbb{P}(T) + \mathbb{P}(G \mid \overline{T})\mathbb{P}(\overline{T})} = \frac{x}{x + \frac{1}{2}(1-x)} = \frac{2x}{x+1}.$$

□

Exercice 3 (Sur 8 points)

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace de probabilité où Ω est un ensemble fini de cardinal supérieur ou égal à 2. On suppose qu'il existe $\omega \in \Omega$ tel que $0 < \mathbb{P}(\{\omega\}) < 1$ et $C \in \mathcal{P}(\Omega)$ tel que $0 < \mathbb{P}(C)$.

1. On note $\mathbb{P}_1 : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbf{R}$ l'application telle que pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}_1(A) = (\mathbb{P}(A))^2$. Montrer que $\mathbb{P}_1$ n'est pas une mesure de probabilité **(3pts)**.
2. Montrer que l'application $\mathbb{P}_2 : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbf{R}$ vérifiant $\mathbb{P}_2(A) = \mathbb{P}(A \cap C)/\mathbb{P}(C)$ pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, est une mesure de probabilité. Que peut-on dire si $\mathbb{P}(C) = 1$ **(3pts)**?
3. L'application $\mathbb{P}_3 : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbf{R}$ telle que pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}_3(A) = \mathbb{P}(A \cup C)$ est-elle une mesure de probabilité **(2pts)**?

Proof. 1. On sait que $\mathbb{P}(\{\omega\}) + \mathbb{P}(\overline{\{\omega\}}) = 1$. Mais $\mathbb{P}_1(\{\omega\}) + \mathbb{P}_1(\overline{\{\omega\}}) = \mathbb{P}^2(\{\omega\}) + \mathbb{P}^2(\overline{\{\omega\}}) < 1$ (car $\mathbb{P}^2(\{\omega\}) < \mathbb{P}(\{\omega\})$ du fait que $0 < \mathbb{P}(\{\omega\}) < 1$ et pareillement pour $\mathbb{P}^2(\overline{\{\omega\}})$). Ceci contredit la condition 2 d'une mesure de probabilités.

2. On a $A \cap C \subset C$, soit $\mathbb{P}(A \cap C) \leq \mathbb{P}(C)$ donc $P_2 : \mathbb{P}_2 : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$. De plus on montre les 2 conditions pour être une mesure de probabilités:
   (a) $\mathbb{P}_2(\Omega) = \mathbb{P}(C)/\mathbb{P}(C) = 1$;
   (b) Soit une suite d'évènements disjoints $(A_i)_{i\in I}$, où I est un ensemble fini ou dénombrable, de la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$. Il est clair alors que $(A_i \cap C)_{i\in I}$ est aussi une suite d'évènements disjoints de la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$. Donc $\mathbb{P}_2\big(\bigcup_{i\in I} A_i\big) = \big(\mathbb{P}(C)\big)^{-1}\mathbb{P}\big(C \cap \big(\bigcup_{i\in I} A_i\big) = \big(\mathbb{P}(C)\big)^{-1}\mathbb{P}\big(\bigcup_{i\in I} A_i \cap C\big) = \big(\mathbb{P}(C)\big)^{-1}\sum_{i\in I}\mathbb{P}\big(A_i \cap C\big) = \sum_{i\in I}\mathbb{P}_2\big(A_i\big)$.
3. On a $\mathbb{P}_3(\emptyset) = \mathbb{P}(C \cup \emptyset) = \mathbb{P}(C) > 0$. Or si $\mathbb{P}_3$ était une mesure de probabilités, alors $\mathbb{P}_3(\emptyset) = 0$. Ce ne peut donc être une mesure de probabilités.

□