Première Année Licence M.A.S.H.S. 2020 – 2021

Probabilités

Contrôle Continu 1, Mars 2021

Examen de 1h15. Tout document ou calculatrice est interdit.

Exercice 1 (Sur 8 points)

On étudie l'évolution de l'espérance de vie des femmes en France de 2010 à 2019. On note E_i cette espérance pour l'année $2010 + i$, avec $i = 0, \dots, 9$. On a:

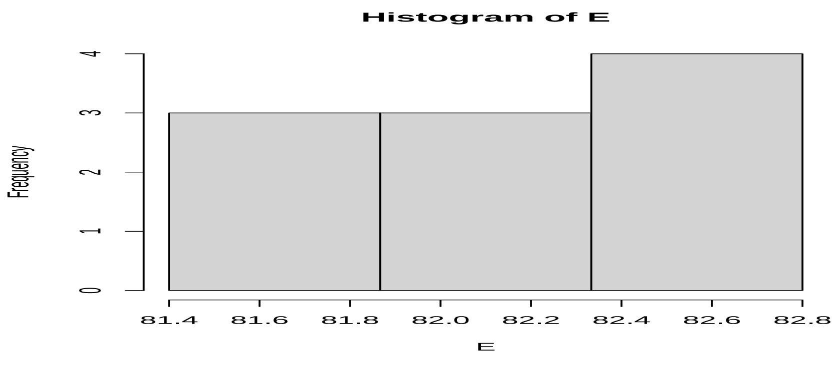
Année i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Espérance de vie E_i	81.4	81.8	81.7	82.0	82.4	82.1	82.3	82.5	82.6	82.8

Le but de l'exercice est de prédire l'espérance de vie en 2020.

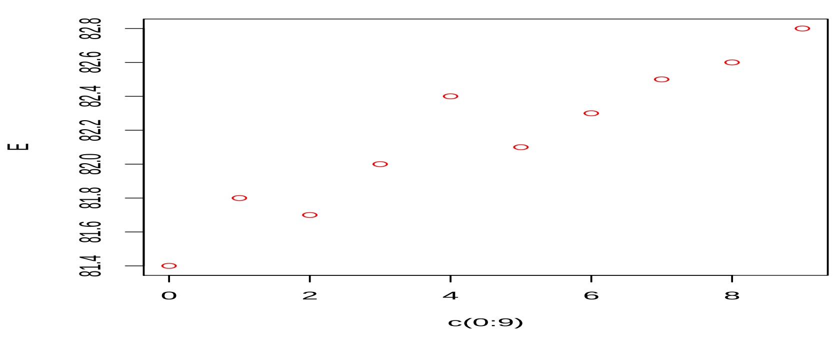
1. Déterminer les moyennes empiriques $\overline{i}$ et $\overline{E}$ des i et des E_i **(1pt)**, ainsi que leurs médianes empiriques **(1pt)**.
2. Représenter un histogramme à 3 classes pour les E_i **(1pt)**.
3. Tracer le nuage de points des (i, E_i) **(0.5pts)**.
4. Il semble que le nuage de points a une forme globalement allongée, ce qui peut se traduire par $E_i \simeq \alpha\, i + \beta$ pour $i = 0, \dots, 9$. En déduire que si on pose $D_i = E_i - E_{i-1}$ pour $i = 1, \dots, 9$ alors $\overline{D}$, moyenne empirique des D_i est proche de α **(1pt)**.
5. Exprimer $\overline{D}$ en fonction de E_9 et E_0 **(1pt)**.
6. Montrer par le même principe que l'on peut approcher β par $\overline{E} - \overline{D}\,\overline{i}$ **(1pt)**, puis que $\alpha \simeq 0.155$ et $\beta \simeq 81.46$ **(0.5pts)**. En déduire une prédiction de l'espérance de vie en 2020 **(1pt)**.

Proof.

1. On a $\overline{i} = \frac{1}{10}\sum_{i=0}^{9} i = \frac{9}{2} = 4.5$ et $\overline{E} = \frac{1}{10}\sum_{i=0}^{9} E_i = 82.16$ ans.
   D'après le cours, comme $n = 10$ est pair, on prend pour médiane la moyenne entre la 5ème et la 6ème valeurs, donc la médiane des i vaut $(4+5)/2 = 4.5$ et celle des E_i est $(82.1 + 82.3)/2 = 82.2$ ans.
2. On coupe en 4 l'intervalle $[81.4, 82.8]$ et on obtient le tracé



3. Voici une représentation du nuage de points:



4. Si $E_i \simeq \alpha\, i + \beta$ alors $E_i \simeq \alpha\,(i-1) + \beta$. Comme $D_i = E_i - E_{i-1}$ alors $D_i \simeq (\alpha\, i + \beta) - (\alpha\,(i-1)+\beta) \simeq \alpha$.
5. On a $\overline{D} = \frac{1}{9}\,(D_1 + D_2 + \cdots + D_9) = \frac{1}{9}\,\big((E_1 - E_0) + (E_2 - E_1) + \cdots + (E_9 - E_8)\big)$. Cette dernière somme est télescopique et il reste $\overline{D} = \dfrac{1}{9}\,(E_9 - E_0)$.
6. On a $\beta = E_i - \alpha\, i$. Donc si on remplace α par $\overline{D}$, on obtient que $\beta \simeq E_i - \overline{D}\, i$ pour tout $i = 0, \ldots, 9$. Ceci sera donc également vrai pour la moyenne des $E_i - \overline{D}\, i$ et ainsi $\beta \simeq \overline{E} - \overline{D}\,\overline{i}$.
   Pour $i = 10$, on a E_{10} qui correspond à l'espérance de vie en 2020 qui vérifie $E_{10} \simeq 10\,\alpha + \beta$. Or $\alpha \simeq \frac{1}{9}\,(82.8 - 81.4) \simeq \frac{1.4}{9}$ et $\beta \simeq 82.16 - \frac{1.4}{9}\, 4.5 \simeq 82.16 - 0.7 = 81.46$. Par suite, $E_{10} \simeq 10\,\alpha + \beta \simeq 81.46 + \frac{14}{9} \simeq 83$ ans.

□

Exercice 2 (Sur 8 points)

On considère une boîte contenant n boules, dont p blanches et $q = n - p$ rouges, avec $1 \le p \le n - 1$.

1. On pioche "en aveugle" une boule dans la boîte, ce que l'on appelle premier tirage. Déterminer l'espace probabilisable naturel $(\Omega, \mathcal{A})$ associé à cette expérience aléatoire **(1pt)**.
2. Toutes les boules ayant la même chance d'être choisies, déterminer la mesure de probabilité associée à $(\Omega, \mathcal{A})$ **(0.5pts)**. En déduire la probabilité que la boule choisie soit rouge après avoir précisé comment s'écrit précisément cet événement **(1pt)**.
3. Si la boule choisie est blanche (respectivement rouge), on remet cette boule dans la boîte et on rajoute une nouvelle boule blanche (respectivement rouge). On pioche à nouveau en aveugle dans la boîte, ce que l'on appelle second tirage. Après avoir formalisé le problème, déterminer la probabilité que la boule piochée au second tirage soit blanche sachant que la boule tirée au premier tirage était blanche **(1.5pts)**.
4. Montrer que la probabilité que la boule tirée au second tirage soit rouge vaut $\dfrac{q}{n}$ **(2.5pts)**.
5. Déterminer la probabilité que la boule tirée au premier tirage était blanche sachant que celle tirée au second tirage est rouge **(1.5pts)**.

Proof.

1. Si on numérote $B_1, \cdots, B_p$ les p boules blanches et $R_1, \ldots, R_q$ les q boules rouges, on peut écrire que $\Omega = \big\{B_1, \cdots, B_p, R_1, \ldots, R_q\big\}$. Comme toutes les boules peuvent être choisies, on prendra naturellement $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.
2. La mesure associée est la musire uniforme, ce qui signifie que pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(A) = \dfrac{\mathrm{Card}(A)}{n}$.
   L'événement "La boule choisie est rouge" est $A = \{R_1, \ldots, R_q\}$. D'où $\mathbb{P}(A) = \dfrac{q}{n}$.
3. Dans la suite on note respectivement les événements $B^{(1)}$ et $B^{(2)}$: "une boule blanche est choisie au tirage 1 (resp. 2)", et $R^{(1)}$ et $R^{(2)}$: "une boule rouge est choisie au tirage 1 (resp. 2)".
   D'après l'énoncé, si au premier tirage on a choisie une boule blanche, alors la boîte dispose de $n+1$ boules dont $p+1$ blanches. Ce qui signifie que la probabilité que la boule piochée au second tirage soit blanche sachant que la boule tirée au premier tirage était blanche s'écrit $\mathbb{P}\big(B^{(2)} \,|\, B^{(1)}\big)$ et vaut $\dfrac{p+1}{n+1}$.
4. On cherche $\mathbb{P}(R^{(2)})$. Par la formule des probabilités totales, on a $\mathbb{P}(R^{(2)}) = \mathbb{P}\big(R^{(2)} \cap R^{(1)}\big) + \mathbb{P}\big(R^{(2)} \cap B^{(1)}\big)$, ou encore, en utilisant les probabilités conditionnelles, $\mathbb{P}(R^{(2)}) = \mathbb{P}\big(R^{(2)} \,|\, R^{(1)}\big)\, \mathbb{P}(R^{(1)}) + \mathbb{P}\big(R^{(2)} \,|\, B^{(1)}\big)\, \mathbb{P}(B^{(1)})$.
   On a $\mathbb{P}(R^{(1)}) = q/n$ et $\mathbb{P}(B^{(1)}) = p/n$. De plus, en utilisant le même raisonnement qu'à la question précédente $\mathbb{P}\big(R^{(2)} \,|\, R^{(1)}\big) = \dfrac{q+1}{n+1}$ et $\mathbb{P}\big(R^{(2)} \,|\, B^{(1)}\big) = \dfrac{q}{n+1}$. Ainsi
   $$\mathbb{P}(R^{(2)}) = \frac{q+1}{n+1}\,\frac{q}{n} + \frac{q}{n+1}\,\frac{p}{n} = \frac{q}{n(n+1)}\,\big((q+1)+p\big) = \frac{q}{n(n+1)}\,(n+1) = \frac{q}{n}.$$
5. On cherche $\mathbb{P}\big(B^{(1)} \,|\, R^{(2)}\big)$. On va utiliser la formule de Bayes et $\mathbb{P}\big(B^{(1)} \,|\, R^{(2)}\big) = \dfrac{\mathbb{P}\big(R^{(2)} \,|\, B^{(1)}\big)\, \mathbb{P}(B^{(1)})}{\mathbb{P}(R^{(2)})} = \dfrac{\frac{q}{n+1}\,\frac{p}{n}}{\frac{q}{n}} = \dfrac{p}{n+1}$.

□

Exercice 3 (Sur 7 points)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Soit A et B deux événements de $\mathcal{A}$ tels que $0 < \mathbb{P}(A) < \mathbb{P}(B) < 1$.

1. Si $A \subset B$, écrire $\mathbb{P}(A \cup B)$ et $\mathbb{P}(A \cap B)$ en fonction de $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(B)$ **(0.5pts+0.5pts)**.
2. Montrer que $A \subset B$ est équivalent à $\overline{B} \cap A = \emptyset$ **(3pts)**.
3. Montrer que A et B indépendants implique $A \not\subset B$ **(3pts)**?

Proof.

1. Si $A \subset B$, alors $A \cap B = A$ et $A \cup B = B$. D'où $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)$.

2. $\Longrightarrow$ On suppose $A \subset B$. En prenant la négation de cette inclusion, on a $\overline{B} \subset \overline{A}$. Donc s $\left(\overline{B} \cap A\right) \subset \left(\overline{A} \cap A\right) = \emptyset$.
$\Longleftarrow$ On suppose que $\overline{B} \cap A = \emptyset$. Alors si $x \in A$, alors $x \notin \overline{B}$ car sinon cela voudrait dire que $x \in \overline{B} \cap A$ donc $\overline{B} \cap A \neq \emptyset$. Mais $x \notin \overline{B}$ est équivalent à $x \in B$. Par conséquent si $x \in A$ alors $x \in B$ soit $A \subset B$.

3. A et B sont indépendant implique que $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$. Comme $\mathbb{P}(A) < \mathbb{P}(B)$ on ne peut pas avoir $B \subset A$. Si $A \subset B$, alors $A \cap B = A$, donc $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$, soit $\mathbb{P}(A)\left(1 - \mathbb{P}(B)\right) = 0$. Mais $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $P(B) < 1$, donc on ne peut pas avoir $\mathbb{P}(A)\left(1 - \mathbb{P}(B)\right) = 0$ et on aboutit à une contradiction: nécessaire $A \not\subset B$.

$\square$