

Première Année Licence M.A.S.H.S. 2021 – 2022

Probabilités

Contrôle Continu 1, Mars 2022

Examen de 1h30. Tout document ou calculatrice est interdit.

Exercice 1 (Sur 11 points)

On appuie $2n + 1$ fois sur la touche **RAND** d'une calculatrice, donnant des nombres (x_1, \dots, x_{2n+1}) qui suivent une probabilité uniforme sur $[0, 1]$ et que l'on supposera tous distincts.

1. Rappeler ce qu'est cette loi de probabilité (en précisant l'ensemble fondamental, la tribu et la mesure de probabilité associée) **(0.5pts)**.
2. Déterminer en justifiant $\mathbb{P}([0, 0.4] \cup [0.6, 1])$ **(1pt)**. Déterminer $m \in \mathbf{R}$ tel que $\mathbb{P}([m, 1]) = 0.5$ **(0.5pts)**.
3. Dire comment calculer à partir de (x_1, \dots, x_{2n+1}) la médiane empirique \bar{m} , puis la moyenne empirique \bar{x} **(0.5pts)**.
4. Montrer que $\sum_{i=1}^{2n+1} x_i \geq (n+1)\bar{m}$ **(2pts)**. En déduire que $\bar{x} \geq \frac{1}{2}\bar{m}$ **(0.5pts)**.
5. De la même manière, montrer que $\bar{x} \leq \frac{1}{2}(1 + \bar{m})$ **(2pts)**.
6. Soit $\overline{\sigma^2}$ la variance empirique. Montrer que $\max\left(0, \frac{1}{2}(\bar{m})^2 - (\bar{x})^2\right) \leq \overline{\sigma^2} \leq \bar{x}(1 - \bar{x})$ **(2pts)+(2pts)**.

Exercice 2 (Sur 3 points)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et soit A et B deux événements de \mathcal{A} . Montrer que $\mathbb{P}(A \cap B) \geq \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(\bar{B})$.

Exercice 3 (Sur 10 points)

On considère une urne contenant 3 boules blanches et 5 boules noires. On tire au hasard 3 boules dans l'urne.

1. Formaliser l'expérience aléatoire en précisant l'espace fondamental Ω , la tribu \mathcal{A} et la mesure de probabilité **(1.5pts)**.
2. Soit E_i l'événement "il y a i boules blanches parmi les 3 boules tirées". Déterminer la probabilité de E_3 **(1pt)**.
3. Déterminer la probabilité de E_1 **(1.5pts)**.
4. Une des 3 boules blanches contient 100 euros, toutes les autres ne contenant rien. Quels sont les gains (en euros) possibles après le tirage des 3 boules **(0.5pts)**?
5. On suppose que l'on a tiré 2 boules noires et 1 blanche. Quelles sont les probabilités des différents gains possibles **(1.5pts)**?
6. Quelle est la probabilité en général de gagner 100 euros **(1.5pts)**?
7. On a obtenu 0 euro. Quelle est la probabilité que l'on ait tiré 3 boules noires **(2.5pts)**?