Première Année Licence M.A.S.H.S. 2021 – 2022

Probabilités

Contrôle Continu 1, Mars 2022

Examen de 1h30. Tout document ou calculatrice est interdit.

Exercice 1 (Sur 11 points)

On appuie $2n+1$ fois sur la touche `RAND` d'une calculatrice, donnant des nombres $(x_1, \dots, x_{2n+1})$ qui suivent une probabilité uniforme sur $[0,1]$ et que l'on supposera tous distincts.

1. Rappeler ce qu'est cette loi de probabilité (en précisant l'ensemble fondamental, la tribu et la mesure de probabilité associée) **(0.5pts)**.
2. Déterminer en justifiant $\mathbb{P}([0, 0.4] \cup [0.6, 1])$ **(1pt)**. Déterminer $m \in \mathbf{R}$ tel que $\mathbb{P}([m, 1]) = 0.5$ **(0.5pts)**.
3. Dire comment calculer à partir de $(x_1, \dots, x_{2n+1})$ la médiane empirique $\overline{m}$, puis la moyenne empirique $\overline{x}$ **(0.5pts)**.
4. Montrer que $\sum_{i=1}^{2n+1} x_i \geq (n+1)\,\overline{m}$ **(2pts)**. En déduire que $\overline{x} \geq \frac{1}{2}\,\overline{m}$ **(0.5pts)**.
5. De la même manière, montrer que $\overline{x} \leq \frac{1}{2}\,(1 + \overline{m})$ **(2pts)**.
6. Soit $\overline{\sigma^2}$ la variance empirique. Montrer que $\max\Big(0\,,\,\frac{1}{2}\,(\overline{m})^2 - (\overline{x})^2\Big) \leq \overline{\sigma^2} \leq \overline{x}(1-\overline{x})$ **(2pts)+(2pts)**.

Proof.

1. L'ensemble fondamental est $\Omega = [0,1]$, la tribu associée est $\mathcal{A} = \mathcal{B}([0,1])$ tribu borélienne sur Ω et la probabilité $\mathbb{P}$ est telle que $\mathbb{P}([a,b]) = b - a$ pour tout $0 \leq a \leq b \leq 1$.
2. On a $[0, 0.4]$ et $[0.6, 1]$ qui sont deux événements de $\mathcal{B}([0,1])$, incompatibles(puisque $[0, 0.4] \cap [0.6, 1] = \emptyset$. Par définition d'une mesure de probabilité, on a donc $\mathbb{P}\big([0, 0.4] \cup [0.6, 1]\big) = \mathbb{P}\big([0, 0.4]\big) + \mathbb{P}\big([0.6, 1]\big) = (0.4 - 0) + (1 - 0.6) = 0.8$
   Par ailleurs, $\mathbb{P}\big([m, 1]\big) = 1 - m$, donc $\mathbb{P}\big([m, 1]\big) = 0.5$ si $1 - m = 0.5$, soit $m = 0.5$.
3. Comme $2n+1$ est impair, on sait d'après le cours que $\overline{m} = x_{(n+1)}$, avec la notation $x_{(i)}$ désignant le i-éme plus petit élément de $(x_1, \dots, x_{2n+1})$ (on a reclassé dans l'ordre ces $2n+1$ valeurs).
   On sait aussi d'après le cours que $\overline{x} = \frac{1}{2n+1} \sum_{i=1}^{2n+1} x_i$
4. On a $x_1 + \cdots + x_{2n+1} = x_{(1)} + \cdots + x_{(2n+1)}$, et $x_{(1)} < x_{(2)} < \cdots < x_{(2n+1)}$. D'où, comme les x_i sont positifs, on a $x_1 + \cdots + x_{2n+1} \geq x_{(n+1)} + x_{(n+2)} + \cdots + x_{(2n+1)}$. Et comme $x_{(n+i)} \geq x_{(n+1)}$ pour tout $i = 1, \dots, n$, on a: $x_1 + \cdots + x_{2n+1} \geq x_{(n+1)} + x_{(n+1)} + \cdots + x_{(n+1)} \geq (n+1) x_{(n+1)} = (n+1)\overline{m}$.
   On en déduit que $\overline{x} = \frac{1}{2n+1} \sum_{i=1}^{2n+1} x_i \geq \frac{(n+1)}{2n+1}\, x_{(n+1)} \geq \frac{1}{2}\,\overline{m}$.
5. Comme pour tout i on a $x_{(i)} \leq 1$, on a également
   $$x_1 + \cdots + x_{2n+1} \leq x_{(1)} + \cdots + x_{(n)} + \frac{1}{2}\,(x_{(n+1)} + 1) + 1 + 1 + \cdots + 1 \leq (n + 1/2)\, x_{(n+1)} + (n + 1/2),$$
   puisque $x_{(i)} \leq x_{(n+1)}$ pour tout $i \leq n$. En renormalisant par $2n+1$, on en déduit le résultat demandé.
6. La variance empirique est définie par: $\overline{\sigma^2} = \frac{1}{2n+1} \sum_{i=1}^{2n+1} x_i^2 - (\overline{x})^2$.
   Comme $x_i \in [0,1]$ pour tout i, alors $x_i^2 \leq x_i$. D'où $\sum_{i=1}^{2n+1} x_i^2 \leq \sum_{i=1}^{2n+1} x_i$ et ainsi $\overline{\sigma^2} \leq \overline{x} - (\overline{x})^2 = \overline{x}(1 - \overline{x})$.
   On sait que l'on a aussi $\overline{\sigma^2} = \frac{1}{2n+1} \sum_{i=1}^{2n+1} \big(x_i - (\overline{x})\big)^2$, donc $\overline{\sigma^2} \geq 0$ comme somme de carrés. Par ailleurs, comme dans la question 4., on a
   $$\sum_{i=1}^{2n+1} x_i^2 = \sum_{i=1}^{2n+1} x_{(i)}^2 \geq (n+1)\, x_{(n+1)}^2 \geq (n + 1/2)\big(\overline{m}\big)^2.$$
   On en déduit que $\frac{1}{2n+1} \sum_{i=1}^{2n+1} x_i^2 \geq \frac{1}{2}\,\big(\overline{m}\big)^2$, d'où $\overline{\sigma^2} \geq \frac{1}{2}\,\big(\overline{m}\big)^2 - (\overline{x})^2$. On a ce résultat, et également $\overline{\sigma^2} \geq 0$, d'où $\overline{\sigma^2} \geq \max\big(0\,,\,\frac{1}{2}\,\big(\overline{m}\big)^2 - (\overline{x})^2\big)$.

□

Exercice 2 (Sur 3 points)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et soit A et B deux événements de $\mathcal{A}$. Montrer que $\mathbb{P}(A \cap B) \geq \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(\overline{B})$ **(3pts)**.

Proof. D'après la formule des probabilités totales, $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \overline{B})$. D'où $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap \overline{B})$. Mais par ailleurs $A \cap \overline{B} \subset \overline{B}$, d'où $\mathbb{P}(A \cap \overline{B}) \leq \mathbb{P}(\overline{B})$, ce qui induit $-\mathbb{P}(A \cap \overline{B}) \geq -\mathbb{P}(\overline{B})$. En reportant cette inégalité dans l'égalité précédente, on en déduit que $\mathbb{P}(A \cap B) \geq \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(\overline{B})$. □

Exercice 3 (Sur 10 points)

On considère une urne contenant 3 boules blanches et 5 boules noires. On tire au hasard 3 boules dans l'urne.

1. Formaliser l'expérience aléatoire en précisant l'espace fondamental Ω, la tribu $\mathcal{A}$ et la mesure de probabilité **(1.5pts)**.
2. Soit E_i l'événement "il y a i boules blanches parmi les 3 boules tirées". Déterminer la probabilité de E_3 **(1pt)**.
3. Déterminer la probabilité de E_1 **(1.5pts)**.
4. Une des 3 boules blanches contient 100 euros, toutes les autres ne contenant rien. Quels sont les gains (en euros) possibles après le tirage des 3 boules **(0.5pts)**?
5. On suppose que l'on a tiré 2 boules noires et 1 blanche. Quelles sont les probabilités des différents gains possibles **(1.5pts)**?
6. Quelle est la probabilité en général de gagner 100 euros **(1.5pts)**?
7. On a obtenu 0 euro. Quelle est la probabilité que l'on ait tiré 3 boules noires **(2.5pts)**?

Proof.

1. Si on note $E = \{B1, B2, B3, N1, N2, N3, N4, N5\}$ les différentes boules dans l'urne, l'ensemble fondamental Ω est constitué des combinaisons de 3 éléments pris dans E (pas de remise et on ne tient pas compte de l'ordre).
   La tribu $\mathcal{A}$ est alors naturellement $\mathcal{P}(\Omega)$ et comme les boules ont toutes autant de chances d'être tirées, la mesure de probabilité $\mathbb{P}$ est la probabilité uniforme sur $(\Omega, \mathcal{A})$.
2. Soit l'événement $E_3 =$"3 boules blanches ont été tirées". On sait que $\mathbb{P}(E_3) = \frac{\mathrm{Card}(E_3)}{\mathrm{Card}(\Omega)}$ puisque $\mathbb{P}$ est la probabilité uniforme. On sait que $\mathrm{Card}(\Omega) = C_8^3 = 8 * 7 * 6/6 = 56$ et $\mathrm{Card}(E_3) = C_3^3 = 1$ puisque l'on choisit 3 boules blanches parmi les 3. D'où $\mathbb{P}(E_3) = 1/56$.
3. Soit l'événement $E_1 =$"1 boule blanche et 2 boules noires ont été tirées". Comme précédemment $\mathbb{P}(E_1) = \frac{\mathrm{Card}(E_1)}{\mathrm{Card}(\Omega)}$. Mais $\mathrm{Card}(E_1) = C_3^1 \times C_5^2 = 3 * 10 = 30$. Ainsi $\mathbb{P}(E_1) = 30/56 = 15/28$.
4. Les gains possibles sont: 0 ou 100 euros.
5. Si l'on a tiré 2 boules noires et 1 blanche, on a pu gagner 0 ou 100 euros. On a $\mathbb{P}(\text{"0"} \mid E_1) = \frac{2}{3}$ car on a une boule blanche parmi les 3 possibles et 2 n'ont pas les 100 euros, et par conséquent $\mathbb{P}(\text{"100"} \mid E_1) = 1 - \mathbb{P}(\text{"0"} \mid E_1) = \frac{1}{3}$.
6. Par rapport au tirage initial, gagner 100 euros c'est choisir une boule blanche particulière (disons $B1$) parmi les 3 boules tirées au sort, et choisir les 2 autres parmi les 7 restantes. Aussi $\mathrm{Card}(\text{"100"}) = C_7^2$. En conséquence, $\mathbb{P}\big(\text{"100"}\big) = \frac{\mathrm{Card}(\text{"100"})}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{C_7^2}{C_8^3} = \frac{3}{8}$.
7. Soit $E_0 =$"3 boules noires ont été tirées". On cherche $\mathbb{P}(E_0 \mid \text{"0"})$. Mais $\mathbb{P}(E_0 \mid \text{"0"}) = \frac{\mathbb{P}(E_0 \cap \text{"0"})}{\mathbb{P}(\text{"0"})} = \frac{\mathbb{P}(\text{"0"} \mid E_0)\,\mathbb{P}(E_0)}{\mathbb{P}(\text{"0"})}$. On a $\mathbb{P}(\text{"0"}) = 1 - \mathbb{P}(\text{"100"}) = \frac{5}{8}$. On a $\mathbb{P}(\text{"0"} \mid E_0) = 1$ car si on a tiré 3 noires on n'a pas pu tirer la boule blanche gagnante. Et $\mathbb{P}(E_0) = \frac{C_5^3}{C_8^3} = \frac{5}{28}$. On en déduit que $\mathbb{P}(E_0 \mid \text{"0"}) = \frac{5}{28}\frac{8}{5} = \frac{2}{7}$.

□