**Première Année Licence M.A.S.H.S.** 2018 – 2019

# Probabilités

Contrôle Continu 2, Avril 2019

*Examen de 1h30. Tout document ou calculatrice est interdit.*

**Exercice 1 (Sur 9 points)**

Soit une urne avec des boules blanches et des boules rouges. A chaque tirage (équiprobable) d'une boule dans l'urne, on remet la boule tirée et on rajoute dans l'urne une boule de la couleur de celle que l'on vient de tirer.

1. Si l'on commence avec une boule rouge et une blanche dans l'urne, on définit $X_1$ le nombre de boules rouge après le premier tirage. Démontrer que $X_1$ est une variable aléatoire sur $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mathbb{P}_1)$, espace de probabilité que l'on précisera explicitement **(1.5pts)**. Déterminer la loi de $X_1$ **(1pt)** et son espérance **(0.5pts)**.

2. Plus généralement on note $X_n$ le nombre de boules rouges après $n$ tirages et on note $A_{n,k}$ l'évènement $X_n = k$. Quelles sont les valeurs possibles pour $X_n$ **(0.5pts)**? Montrer que $\mathbb{P}(X_n = n+1) = \mathbb{P}(X_n = 1)$ **(1.5pts)**.

3. On s'intéresse à $X_2$. Déterminer $\mathbb{P}(X_2 = 2 \mid A_{1,1})$ puis $\mathbb{P}(X_2 = 2 \mid A_{1,2})$ **(1.5pts)**. En déduire $\mathbb{P}(X_2 = 2)$ **(1.5pts)**, puis montrer que $X_2$ suit une loi uniforme **(1pt)**.

**Exercice 2 (Sur 7 points)**

Soit la fonction $f_X(x) = C\, e^{-|x|}$ pour $x \in \mathbf{R}$, avec $C \in \mathbf{R}$.

1. Montrer que $f_X$ est une fonction de densité d'une variable aléatoire $X$ si et seulement si $C = 1/2$ **(1pt)**.

2. Montrer que la fonction de répartition $F_X$ de $X$ vérifie $F_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\, e^{x} & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - \dfrac{1}{2}\, e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ **(1.5pts)**.

3. Tracer $F_X$ **(0.5pts)**, puis déterminer explicitement le quantile théorique d'ordre $p \in ]0,1[$, c'est-à-dire le réel $q_p = \inf \Big\{ x \in \mathbf{R},\ \mathbb{P}(X \leq x) \geq p \Big\}$ **(2pts)**. En déduire la médiane théorique de $X$ **(0.5pts)**.

4. Montrer que $\mathbb{E}(X) = 0$ **(0.5pts)** et $\mathrm{var}(X) = 2$ **(1pt)**?

**Exercice 3 (Sur 10 points)**

Soit $X$ une variable aléatoire (discrète ou continue) sur l'espace probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs positives et telle que $\mathbb{E}(X)$ existe. Soit $\varepsilon > 0$, un réel fixé et on note $p_\varepsilon = \mathbb{P}(X \geq \varepsilon)$. Soit $f : \mathbf{R} \to [0, \infty[$ une fonction continue par morceaux. On admettra que $f(X)$ est aussi une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. Montrer que $0 \leq \mathbb{E}(f(X))$ quand $\mathbb{E}(f(X))$ existe **(1pt)**.

2. On considère la variable aléatoire $g(X)$ avec $g(x) = 1$ si $x \geq \varepsilon$ et $g(x) = 0$ si $x < \varepsilon$. Donner la loi de $g(X)$ **(1pt)** ainsi que son espérance **(1pt)**.

3. Soit la fonction $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telle que $h(x) = x$ si $x \geq \varepsilon$ et $h(x) = 0$ si $x < \varepsilon$. Faire la représentation graphique de $h$ **(0.5pts)**. Montrer que $h(x) \geq \varepsilon\, g(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$ **(1pt)**. En utilisant la question 1., en déduire que $\mathbb{E}(h(X)) \geq \varepsilon\, \mathbb{E}(g(X))$ **(1pt)**.

4. Déduire de ce qui précède que
$$p_\varepsilon = \mathbb{P}(X \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{\varepsilon} \quad \textbf{(2.5pts)}.$$

5. Si on suppose que $\mathbb{E}(X^2) < \infty$, déduire que pour tout $\eta > 0$,
$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \eta) \leq \frac{\mathrm{var}(X)}{\eta^2} \quad \textbf{(2pts)}.$$