Première Année Licence M.A.S.H.S. 2018 – 2019

Probabilités

Correction du Contrôle Continu 2, Avril 2019

Examen de 1h30. Tout document ou calculatrice est interdit.

Exercice 1 (Sur 9 points)

Soit une urne avec des boules blanches et des boules rouges. A chaque tirage (équiprobable) d'une boule dans l'urne, on remet la boule tirée et on rajoute dans l'urne une boule de la couleur de celle que l'on vient de tirer.

1. Si l'on commence avec une boule rouge et une blanche dans l'urne, on définit X_1 le nombre de boules rouge après le premier tirage. Démontrer que X_1 est une variable aléatoire sur $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mathbb{P}_1)$, espace de probabilité que l'on précisera explicitement **(1.5pts)**. Déterminer la loi de X_1 **(1pt)** et son espérance **(0.5pts)**.

2. Plus généralement on note X_n le nombre de boules rouges après n tirages et on note $A_{n,k}$ l'évènement $X_n = k$. Quelles sont les valeurs possibles pour X_n **(0.5pts)**? Montrer que $\mathbb{P}(X_n = n+1) = \mathbb{P}(X_n = 1)$ **(1.5pts)**.

3. On s'intéresse à X_2. Déterminer $\mathbb{P}(X_2 = 2 \mid A_{1,1})$ puis $\mathbb{P}(X_2 = 2 \mid A_{1,2})$ **(1.5pts)**. En déduire $\mathbb{P}(X_2 = 2)$ **(1.5pts)**, puis montrer que X_2 suit une loi uniforme **(1pt)**.

Proof.

1. Après un tirage, il y a 3 boules et on en déduit que $\Omega = \big\{\omega_1, \omega_2\big\}$ avec $\omega_1 = \{B_1, B_2, R_1\}$ et $\omega_2 = \{B_1, R_1, R_2\}$, $\mathcal{A} = \big\{\emptyset, \Omega, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}\big\}$ et $\mathbb{P}$ est telle que $\mathbb{P}(\omega_1) = 1/2 = \mathbb{P}(\omega_2)$ car il y a une chance sur deux de choisir une blanche ou une rouge.
On a $X_1(\omega_1) = 1$ et $X_1(\omega_1) = 2$ et on en déduit que $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 2) = 1/2$.
On a $\mathbb{E}(X_1) = 1 \times 1/2 + 2 \times 1/2 = 3/2$.
2. X_n peut prendre pour valeurs tout entier dans $\{1, 2, \dots, n+1\}$.
Si on considère le nombre de boules blanches Y_n, il est clair, pour des raisons de symétrie du problème, que la loi de Y_n est la même que celle de X_n, et en particulier $\mathbb{P}(Y_n = n+1) = P(X_n = n+1)$. Mais $Y_n + X_n = n+2$ pour tout n, donc quand $X_n = 1$ alors $Y_n = n+1$, d'où $\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(Y_n = n+1)$ et ainsi $\mathbb{P}(X_n = n+1) = P(X_n = 1)$.
3. Lorsque $X_1 = 1$, cela signifie que l'on a 1 rouge et 2 blanches dans l'urne. Au tirage suivant, on a donc une probabilité 1/3 de choisir une rouge et 2/3 une blanche. Ainsi $\mathbb{P}(X_2 = 2 \mid A_{1,1}) = 1/3$. De la mème manière, lorsque $X_1 = 2$, cela signifie que l'on a 2 rouges et 1 blanche dans l'urne. Au tirage suivant, on a donc une probabilité 2/3 de choisir une rouge et 1/3 une blanche ce qui conduit à $\mathbb{P}(X_2 = 2 \mid A_{1,2}) = 1/3$.
Au final, $\mathbb{P}(X_2 = 2) = \mathbb{P}(X_2 = 2 \cap A_{1,2}) + \mathbb{P}(X_2 = 2 \cap A_{1,1})$ par la formule des probabilités totales. Or $\mathbb{P}(A_{1,2}) = \mathbb{P}(A_{1,1}) = 1/2$ d'après la question 1. Comme $\mathbb{P}(X_2 = 2 \cap A_{1,2}) = \mathbb{P}(X_2 = 2 \mid A_{1,2})\mathbb{P}(A_{1,2})$, on en déduit que $\mathbb{P}(X_2 = 2 \cap A_{1,2}) = 1/6$, et de même $\mathbb{P}(X_2 = 2 \cap A_{1,1}) = 1/6$. Ainsi $\mathbb{P}(X_2 = 2) = 1/3$.
D'après la question précédente, $\mathbb{P}(X_2 = 1) = \mathbb{P}(X_2 = 3)$ et comme $\mathbb{P}(X_2 = 1) + \mathbb{P}(X_2 = 2) + \mathbb{P}(X_2 = 3) = 1$, on en déduit que $\mathbb{P}(X_2 = 1) = \mathbb{P}(X_2 = 2) = \mathbb{P}(X_2 = 3) = 1/3$: probabilité uniforme.

□

Exercice 2 (Sur 7 points)

Soit la fonction $f_X(x) = C\, e^{-|x|}$ pour $x \in \mathbf{R}$, avec $C \in \mathbf{R}$.

1. Montrer que f_X est une fonction de densité d'une variable aléatoire X si et seulement si $C = 1/2$ **(1pt)**.

2. Montrer que la fonction de répartition F_X de X vérifie
$$F_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\, e^{x} & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - \dfrac{1}{2}\, e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad \textbf{(1.5pts)}.$$

3. Tracer F_X **(0.5pts)**, puis déterminer explicitement le quantile théorique d'ordre $p \in]0,1[$, c'est-à-dire le réel
$$q_p = \inf\Big\{x \in \mathbf{R},\ \mathbb{P}(X \leq x) \geq p\Big\} \quad \textbf{(2pts)}.$$
En déduire que la médiane théorique de X est 0 **(0.5pts)**.

4. Montrer que $\mathbb{E}(X) = 0$ **(0.5pts)** et $\text{var}(X) = 2$ **(1pt)**?

Proof. 1. On a par parité $\int_{-\infty}^{+\infty} C\, e^{-|x|}dx = 2C \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 2C\left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty} = 2C$. Pour que f_X soit bien une densité, il faut que f_X soit positive (vrai si $C \geq 0$) et $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$. Ceci entraîne que $2C = 1$, soit $C = 1/2$.

2. On a $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$. Pour $x \leq 0$, $F_X(x) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} e^t dt = \frac{1}{2}\left[e^t\right]_{-\infty}^{x} = \frac{1}{2}e^x$. Pour $x \geq 0$, $F_X(x) = F_X(0) + \frac{1}{2}\int_0^x e^{-t}dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - e^{-x}) = 1 - \frac{1}{2}e^{-x}$.
3. Pour $p \leq 1/2$, on résoud $\frac{1}{2}e^q = p$, soit $q = \ln(2p)$. Pour $p \geq 1/2$, on résoud $1 - \frac{1}{2}e^{-q} = p$, soit $q = -\ln(2 - 2p)$.
Pour la médiane, on prend $p = 1/2$, d'où $q = 0$.
4. On a $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx = 0$ car la fonction est impaire.
On a $\text{var}(X) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)dx - 0^2 = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x}dx = \left[-x^2e^{-x}\right]_0^{\infty} + 2\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$ par intégration par parties. En conséquence, $\text{var}(X) = 2\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = \left[-2xe^{-x}\right]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 2\left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty} = 2$.

□

Exercice 3 (Sur 10 points)

Soit X une variable aléatoire (discrète ou continue) sur l'espace probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs positives et telle que $\mathbb{E}(X)$ existe. Soit $\varepsilon > 0$, un réel fixé et on note $p_\varepsilon = \mathbb{P}(X \geq \varepsilon)$. Soit $f : \mathbf{R} \to [0, \infty[$ une fonction continue par morceaux. On admettra que $f(X)$ est aussi une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. Montrer que $0 \leq \mathbb{E}(f(X))$ quand $\mathbb{E}(f(X))$ existe **(1pt)**.
2. On considère la variable aléatoire $g(X)$ avec $g(x) = 1$ si $x \geq \varepsilon$ et $g(x) = 0$ si $x < \varepsilon$. Donner la loi de $g(X)$ **(1pt)** ainsi que son espérance **(1pt)**.
3. Soit la fonction $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telle que $h(x) = x$ si $x \geq \varepsilon$ et $h(x) = 0$ si $x < \varepsilon$. Faire la représentation graphique de h **(0.5pts)**. Montrer que $h(x) \geq \varepsilon\, g(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$ **(1pt)**. En utilisant la question 1., en déduire que $\mathbb{E}(h(X)) \geq \varepsilon\, \mathbb{E}(g(X))$ **(1pt)**.
4. Déduire de ce qui précède que
$$p_\varepsilon = \mathbb{P}(X \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{\varepsilon} \quad \textbf{(2.5pts)}.$$
5. Si on suppose que $\mathbb{E}(X^2) < \infty$, déduire que pour tout $\eta > 0$,
$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \eta) \leq \frac{\text{var}(X)}{\eta^2} \quad \textbf{(2pts)}.$$

Proof. 1. D'après la formule, si X est discrète, $\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{i\in I} f(x_i)\,\mathbb{P}(X = x_i)$ et tout est positif dans cette formule. Si X est continue, $\mathbb{E}(f(X)) = \int f(x) f_X(x)dx$ et tout est positif dans cette formule. Dans les 2 cas, $\mathbb{E}(f(X))$ est positive.

2. On a $g(X)$ qui ne prend pour valeur que 1 ou 0 c'est donc une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli. Son paramètre p est donné par $\mathbb{P}(g(X) = 1) = \mathbb{P}(X \geq \varepsilon) = p_\varepsilon$.
On sait que l'espérance d'une variable de Bernoulli est son paramètre donc $\mathbb{E}(g(X)) = p_\varepsilon$.
3. Pour $x \geq \varepsilon$, $h(x) = x$. Mais comme cela a lieu pour $x \geq \varepsilon$, on a bien $h(x) \geq \varepsilon$. De plus pour $x \geq \varepsilon$, $g(x) = 1$, d'où $h(x) \geq \varepsilon\, g(x)$. Pour $x < \varepsilon$, $h(x) = 0 = g(x)$, d'où $h(x) \geq \varepsilon\, g(x)$.
On en déduit que $h(X) \geq \varepsilon\, g(X)$. En considérant la fonction $\ell(x) = h(x) - \varepsilon\, g(x)$, cette fonction est positive, donc grâce à la question 1., on en déduit que son espérance est positive, soit $\mathbb{E}(h(X) - \varepsilon\, g(X)) \geq 0$, soit $\mathbb{E}(h(X)) \geq \varepsilon\, \mathbb{E}(g(X))$.
4. Comme $\mathbb{E}(g(X)) = p_\varepsilon$, on a $\mathbb{E}(h(X)) \geq \varepsilon\, p_\varepsilon$. Mais $h(x) \leq x$ pour tout x, donc comme précédemment on aboutit à $\mathbb{E}(h(X)) \leq \mathbb{E}(X)$. Par suite, $\varepsilon\, p_\varepsilon \leq \mathbb{E}(X)$, d'où le résultat.
5. Reprenons le résultat précédent, et au lieu de X considérons $|X - \mathbb{E}(x)|^2$, et au lieu de ε considérons η^2. On a ainsi
$$\mathbb{P}(|X - E(x)|^2 \geq \eta^2) \leq \frac{\mathbb{E}(|X - E(x)|^2)}{\eta^2},$$
d'où le résultat.

□