Première Année Licence M.I.A.S.H.S. 2020 − 2021

Probabilités

Contrôle Continu 2, Avril 2021

Examen de 1h30. Tout document ou calculatrice est interdit.

Exercice 1 (Sur 12 points)

Dans la suite on note n un entier strictement positif.

1. Soit $N \in \{1, 2, \ldots, n\}$ fixé. On jette N fois de manière indépendante un dé équilibré et on note A l'événement "On a obtenu au moins une fois 6". Démontrer que $\mathbb{P}(A) = 1 - (5/6)^N$ **(2pts)**. Déterminer N pour que $P(A) > 1/2$ **(1pt)**.
2. On note X la variable aléatoire qui vaut 1 si 6 a été obtenu au moins une fois sur les N lancers, et 0 sinon. Déterminer la loi de X **(1pt)**, puis son espérance et sa variance **(1pt)**.
3. On suppose désormais que N est un entier choisi aléatoirement et uniformément dans $\{1, 2, \ldots, n\}$. Rappeler la loi de probabilité de N **(0.5pts)** et déterminer son espérance **(1pt)**.
4. On notera B_k l'événement "$N = k$" pour $k = 1, \ldots, n$. Donner $\mathbb{P}(\overline{A} \mid B_k)$ **(0.5pts)**. Montrer en justifiant que $\mathbb{P}(\overline{A}) = \dfrac{5}{n}\Big(1 - (\dfrac{5}{6})^n\Big)$ **(2pts)**.
5. Déterminer $\mathbb{P}(B_1 \mid \overline{A})$ **(1.5pts)**. Montrer que cette probabilité tend vers 1/6 quand $n \to \infty$ **(0.5pts)**.

Exercice 2 (Sur 16 points)

Soit $\Omega =]-1, 1[$ et la tribu associée à Ω, $\mathcal{B}(]-1, 1[)$. On rappelle que $\mathcal{B}(]-1, 1[)$ contient toutes les unions ou intersections dénombrables d'intervalles inclus dans Ω.

1. Sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{B}(]-1, 1[))$ on considère la mesure de probabilité $\mathbb{P}$ telle que pour tout intervalle $[a, b] \subset \Omega$, alors $\mathbb{P}([a, b]) = \frac{1}{2}(b - a)$.
   (a) Calculer $\mathbb{P}(\Omega)$ **(0.5pts)** et pour $x \in \Omega$, calculer $\mathbb{P}(\{x\})$ **(0.5pts)**.
   (b) Démontrer qu'il existe une fonction f que l'on précisera telle que $\mathbb{P}([a, b]) = \int_a^b f(t)\,dt$ pour tout $[a, b] \subset \Omega$ **(1pt)**.
   (c) Soit $A = \cup_{n=1}^{\infty}\{\frac{1}{n}\}$. Démontrer que $A \in \mathcal{B}(]-1, 1[)$ **(1pt)**. Calculer $\mathbb{P}(A)$ **(1pt)**.
2. On considère désormais l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{B}(]-1, 1[), \mathbb{P})$ et on définit une application $X : \Omega \to \mathbf{R}$ telle que pour $\omega \in \Omega$, $X(\omega) = \ln(1 + \omega) - \ln(1 - \omega)$.
   (a) Donner le tableau de variations de la fonction $f(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$ **(1pt)**. En déduire que f admet une application réciproque f^{-1} **(1pt)** et montrer que $\forall y \in \mathbf{R}$, $f^{-1}(y) = \dfrac{e^y - 1}{e^y + 1}$ **(1pt)**.
   (b) Démontrer que X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{B}(]-1, 1[), \mathbb{P})$ **(2pts)**.
   (c) Démontrer que F_X, fonction de répartition de X, vérifie $F_X(x) = 1 - (e^x + 1)^{-1}$ pour tout $x \in \mathbf{R}$ **(1.5pts)**. En déduire la médiane de X, réel m tel que $m = \inf_{x \in \mathbf{R}} \{F_X(x) \geq 1/2\}$ **(1.5pts)**.
   (d) En déduire que X est une variable aléatoire continue **(1pt)** et préciser sa densité f_X **(1pt)**.
   (e) Démontrer que f_X est une fonction paire **(1pts)** et en déduire $\mathbb{E}[X]$ **(1pt)**.