Première Année Licence M.I.A.S.H.S. 2020 – 2021

Probabilités

Contrôle Continu 2, Avril 2021

Examen de 1h30. Tout document ou calculatrice est interdit.

Exercice 1 (Sur 12 points)

Dans la suite on note n un entier strictement positif.

1. Soit $N \in \{1, 2, \dots, n\}$ fixé. On jette N fois de manière indépendante un dé équilibré et on note A l'événement "On a obtenu au moins une fois 6". Démontrer que $\mathbb{P}(A) = 1 - (5/6)^N$ **(2pts)**. Déterminer N pour que $P(A) > 1/2$ **(1pt)**.

2. On note X la variable aléatoire qui vaut 1 si 6 a été obtenu au moins une fois sur les N lancers, et 0 sinon. Déterminer la loi de X **(1pt)**, puis son espérance et sa variance **(1pt)**.

3. On suppose désormais que N est un entier choisi aléatoirement et uniformément dans $\{1, 2, \dots, n\}$. Rappeler la loi de probabilité de N **(0.5pts)** et déterminer son espérance **(1pt)**.

4. On notera B_k l'événement "$N = k$" pour $k = 1, \dots, n$. Donner $\mathbb{P}(\overline{A} \mid B_k)$ **(0.5pts)**. Montrer en justifiant que $\mathbb{P}(\overline{A}) = \dfrac{5}{n}\Big(1 - (\dfrac{5}{6})^n\Big)$ **(2pts)**.

5. Déterminer $\mathbb{P}(B_1 \mid \overline{A})$ **(1.5pts)**. Montrer que cette probabilité tend vers 1/6 quand $n \to \infty$ **(0.5pts)**.

Proof.

1. L'événement contraire de A, $\overline{A}$, correspond à N lancers consécutifs indépendants sans 6. Or la probabilité de ne pas avoir un 6 vaut 5/6, donc $\mathbb{P}(\overline{A}) = (5/6)^N$ et ainsi $\mathbb{P}(A) = 1 - (5/6)^N$.
On veut $P(A) > 1/2$, soit $1 - (5/6)^N > 1/2$, d'où $(5/6)^N < 1/2$ donc en passant en log, $N \ln(5/6) < -\ln(2)$ ou encore $N > \ln(2)/(\ln(6/5)$.

2. X ne prend que 2 valeurs 0 et 1, donc X suit une loi de Bernoulli. De plus, l'événement "$X = 1$" est exactement l'événement A, donc $\mathbb{P}(X = 1) = 1 - (5/6)^N$. Ainsi X suit une loi $\mathcal{B}\big(1 - (5/6)^N\big)$.
On en déduit que $\mathbb{E}[X] = 1 - (5/6)^N$ et également $\mathrm{var}(X) = (5/6)^N\big(1 - (5/6)^N\big)$.

3. Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $\mathbb{P}(N = k) = 1/n$ puisque la probabilité est uniforme. En conséquence, $\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^n k\,\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{n}\,\frac{1}{2}\,n(n+1) = \frac{1}{2}\,(n+1)$.

4. D'après ce que l'on a déjà obtenu, $\mathbb{P}(\overline{A} \mid B_k) = (5/6)^k$.
On a $(B_k)_{1\le k\le n}$ qui forme une partition puisque $B_k \cap B_\ell = \emptyset$ et N ne prend que $\{1, \dots, n\}$ comme valeurs. D'après la formule des probabilités totales, $\mathbb{P}(\overline{A}) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}\big(\overline{A} \cap B_k\big) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}\big(\overline{A} \mid B_k\big)\,\mathbb{P}(B_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n (5/6)^k$ puisque $\mathbb{P}(B_k) = 1/n$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$. D'après la formule de la somme des termes d'une suite géométrique, $\mathbb{P}(\overline{A}) = \frac{1}{n}\,\frac{5}{6}\,\frac{1-(5/6)^n}{1-(5/6)} = \frac{5}{n}\,\big(1 - (5/6)^n\big)$.

5. $\mathbb{P}(B_1 \mid \overline{A}) = \frac{\mathbb{P}(B_1\cap\overline{A})}{\mathbb{P}(\overline{A})} = \frac{\mathbb{P}(\overline{A} \mid B_1)\,\mathbb{P}(B_1)}{\mathbb{P}(\overline{A})} = \frac{\frac{5}{6}\,\frac{1}{n}}{\frac{5}{n}\big(1-(5/6)^n\big)} = \frac{1}{6}\,\frac{1}{1-(5/6)^n}$.
Il est clair que $(5/6)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, d'où $\mathbb{P}(B_1 \mid \overline{A}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{6}$.

□

Exercice 2 (Sur 16 points)

Soit $\Omega =]-1, 1[$ et la tribu associée à Ω, $\mathcal{B}(]-1, 1[)$. On rappelle que $\mathcal{B}(]-1, 1[)$ contient toutes les unions ou intersections dénombrables d'intervalles inclus dans Ω.

1. Sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{B}(]-1,1[))$ on considère la mesure de probabilité $\mathbb{P}$ telle que pour tout intervalle $[a,b] \subset \Omega$, alors $\mathbb{P}([a,b]) = \frac{1}{2}(b-a)$.
   (a) Calculer $\mathbb{P}(\Omega)$ **(0.5pts)** et pour $x \in \Omega$, calculer $\mathbb{P}(\{x\})$ **(0.5pts)**.
   (b) Démontrer qu'il existe une fonction f que l'on précisera telle que $\mathbb{P}([a,b]) = \int_a^b f(t)\,dt$ pour tout $[a,b] \subset \Omega$ **(1pt)**.
   (c) Soit $A = \cup_{n=1}^{\infty}\{\frac{1}{n}\}$. Démontrer que $A \in \mathcal{B}(]-1,1[)$ **(1pt)**. Calculer $\mathbb{P}(A)$ **(1pt)**.
2. On considère désormais l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{B}(]-1,1[), \mathbb{P})$ et on définit une application $X : \Omega \to \mathbf{R}$ telle que pour $\omega \in \Omega$, $X(\omega) = \ln(1+\omega) - \ln(1-\omega)$.
   (a) Donner le tableau de variations de la fonction $f(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$ **(1pt)**. En déduire que f admet une application réciproque f^{-1} **(1pt)** et montrer que $\forall y \in \mathbf{R}$, $f^{-1}(y) = \dfrac{e^y - 1}{e^y + 1}$ **(1pt)**.
   (b) Démontrer que X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{B}(]-1,1[), \mathbb{P})$ **(2pts)**.
   (c) Démontrer que F_X, fonction de répartition de X, vérifie $F_X(x) = 1 - (e^x+1)^{-1}$ pour tout $x \in \mathbf{R}$ **(1.5pts)**. En déduire la médiane de X, réel m tel que $m = \inf_{x\in\mathbf{R}}\{F_X(x) \geq 1/2\}$ **(1.5pts)**.
   (d) En déduire que X est une variable aléatoire continue **(1pt)** et préciser sa densité f_X **(1pt)**.
   (e) Démontrer que f_X est une fonction paire **(1pts)** et en déduire $\mathbb{E}[X]$ **(1pt)**.

Proof. 1. (a) On a par définition d'une probabilité $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
On a $\mathbb{P}(\{x\}) = \mathbb{P}([x,x]) = (x-x)/2 = 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

(b) On a $\mathbb{P}([a,b]) = (b-a)/2 = \int_a^b \frac{1}{2}\,dt$ pour tout $-1 < a \leq b < 1$. Donc $f(t) = 1/2$ pour tout $t \in \Omega$.

(c) On peut écrire que $A = \cup_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$, donc A est une union dénombrable d'intervalles inclus dans Ω et ainsi par définition $A \in \mathcal{B}(]-1,1[)$.
A est une union dénombrable d'intervalles disjoints, donc d'après la définition d'une probabilité, $\mathbb{P}(A) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}([\frac{1}{n}, \frac{1}{n}])$ $\sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$ d'après la question précédente.

2. (a) On a $f'(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} > 0$ pour tout $x \in]-1,1[$. Donc f est strictement croissante sur $]-1,1[$ et $\lim_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$.
On a f strictement croissante et continue de $]-1,1[$ dans $\mathbf{R}$ donc f est bijective. Elle admet donc une application réciproque f^{-1}.
Pour déterminer f^{-1}, on résout $f(x) = y$ et on écrit x en fonction de y. D'où $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = y$, donc en passant à l'exponentielle, $\frac{1+x}{1-x} = e^y$ ou encore $1 + x = e^y(1-x)$ et ainsi $x = \frac{e^y-1}{e^y+1} = f^{-1}(y)$.

(b) D'abord on a bien X application de $]-1,1[$ dans $\mathbf{R}$. Ensuite on doit montrer que pour tout $x \in]-1,1[$, "$X \leq x$" $= \{\omega \in]-1,1[, X(\omega) \leq x\}$ événement de $\mathcal{B}(]-1,1[)$. Mais comme $\omega \to X(\omega)$ est continue et strictement croissante, alors "$X \leq x$" $= \{\omega \in]-1,1[, \omega \leq f^{-1}(x)\} = \left]-1, \frac{e^x-1}{e^x+1}\right]$, ceci est bien un intervalle de $\mathcal{B}(]-1,1[)$

(c) On a $F_X = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}\left(\left]-1, \frac{e^x-1}{e^x+1}\right]\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1} + 1\right) = 1 - \left(e^x+1\right)^{-1}$.
On remarque que $F_X(0) = 1/2$ et $F_X(x) < 1/2$ pour $x < 0$. Donc $m = 0$.

(d) On remarque que F est une fonction continue et strictement croissante sur $\mathbf{R}$ donc X est une variable continue.
On a $f_X(x) = F'_X(x)$ et donc $f_X(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$ pour $x \in \mathbf{R}$.

(e) On a $f_X(-x) = \frac{e^{-x}}{(e^{-x}+1)^2} = \frac{e^{-x}}{e^{-2x}(e^x+1)^2} = f_X(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.
Comme f_X est paire, $x\,f_X(x)$ est impaire, donc $\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} t\,f_X(t)\,dt = 0$.

□