Première Année Licence M.A.S.H.S. 2021 – 2022

Probabilités

Contrôle Continu 1, Mars 2022

Examen de 1h30. Tout document ou calculatrice est interdit.

Exercice 1 (Sur 13 points)

Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On définit la loi de probabilité de X de la manière suivante: on jette une pièce équilibrée et si "Pile" est obtenu la loi de X est une loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 > 0$, si c'est "Face" ce sera une loi exponentielle de paramètre $\lambda_2 > 0$.

1. Rappeler ce qu'est la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ **(1pt)**.
2. Déterminer les valeurs prises par X **(0.5pts)** et préciser sa fonction de répartition F_X **(1.5pts)**. En déduire que X est une variable aléatoire continue ayant pour densité de probabilité:
$$f_X(x) = \frac{1}{2}\left(\lambda_1\, e^{-\lambda_1 x} + \lambda_2\, e^{-\lambda_2 x}\right) \quad \text{pour } x > 0 \quad \text{et} \quad f_X(x) = 0 \quad \text{pour } x < 0 \text{ } (\mathbf{1pt}).$$
3. En déduire $\mathbb{E}[X]$ **(1pt)** et montrer que $\mathrm{var}(X) = \frac{3}{4}\Big(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\Big)^2 + \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2}$ **(2pts)**.
4. On suppose désormais que $\lambda_2 = 2\,\lambda_1$. Déterminer la médiane de X, soit m tel que $\mathbb{P}(X \leq m) = \frac{1}{2}$ **(3pts)**.
5. On suppose avoir obtenu $X > 1/\lambda_1$. Quelle est la probabilité que l'on ait eu "Pile"? **(3pts)**.

Exercice 2 (Sur 12 points)

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\Big\{-n, -(n-1), \ldots, 0, \ldots, (n-1), n\Big\}$ telle que pour $k \in \{1, \ldots, n\}$, $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X = -k) = \frac{1}{4^k}$.

1. Pour cette question uniquement on suppose $n = 1$. Déterminer $\mathbb{P}(X = 0)$ **(0.5pts)**. Représenter la fonction de répartition de X **(1.5pts)**. Calculer $\mathbb{E}[X]$ **(0.5pts)** et $\mathrm{var}(X)$ **(0.5pts)**.
2. On suppose désormais n quelconque. Démontrer que $\mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{4^n}\right)$ **(2pts)**.
3. Calculer $\mathbb{E}[X]$ **(1.5pts)**.
4. Démontrer que $\mathbb{E}[|X|^n] < \infty$ **(1pt)** puis que $\mathbb{E}[|X|^n] \geq 2\,(n/4)^n$ **(1.5pts)**. Quelle est la limite de $\mathbb{E}[|X|^n]$ quand $n \to +\infty$ **(0.5pts)**?
5. Soit A l'événement "$X \geq 1$". Déterminer $\mathbb{P}(X = 1 \mid A)$ **(1.5pts)**. Les événements "$X = 1$" et A sont-ils indépendants **(0.5pts)**? Déterminer également $\mathbb{P}(A \mid X = 1)$ **(0.5pts)**.