Première Année Licence M.A.S.H.S. 2021 – 2022

Probabilités

Contrôle Continu 1, Mars 2022

Examen de 1h30. Tout document ou calculatrice est interdit.

Exercice 1 (Sur 13 points)

Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On définit la loi de probabilité de X de la manière suivante: on jette une pièce équilibrée et si "Pile" est obtenu la loi de X est une loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 > 0$, si c'est "Face" ce sera une loi exponentielle de paramètre $\lambda_2 > 0$.

1. Rappeler ce qu'est la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ **(1pt)**.
2. Déterminer les valeurs prises par X **(0.5pts)** et préciser sa fonction de répartition F_X **(1.5pts)**. En déduire que X est une variable aléatoire continue ayant pour densité de probabilité:
$$f_X(x) = \frac{1}{2}\Big(\lambda_1\, e^{-\lambda_1 x} + \lambda_2\, e^{-\lambda_2 x}\Big) \quad \text{pour } x > 0 \quad \text{et} \quad f_X(x) = 0 \quad \text{pour } x < 0 \ (\mathbf{1pt}).$$
3. En déduire $\mathbb{E}[X]$ **(1pt)** et montrer que $\mathrm{var}(X) = \dfrac{3}{4}\Big(\dfrac{1}{\lambda_1} - \dfrac{1}{\lambda_2}\Big)^2 + \dfrac{1}{\lambda_1\lambda_2}$ **(2pts)**.
4. On suppose désormais que $\lambda_2 = 2\,\lambda_1$. Déterminer la médiane de X, soit m tel que $\mathbb{P}(X \leq m) = \dfrac{1}{2}$ **(3pts)**.
5. On suppose avoir obtenu $X > 1/\lambda_1$. Quelle est la probabilité que l'on ait eu "Pile"? **(3pts)**.

Proof.

1. On a $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ pour $x \geq 0$ et $F(x) = 0$ pour $x < 0$.
2. Une loi exponentielle prenant ses valeurs dans $[0, \infty[$ quel que soit son paramètre, on en déduit que X prend ses valeurs dans $[0, \infty[$.
Pour $x < 0$, on a $F_X(x) = 0$ d'après ce qui vient d'être dit. Pour $x \geq 0$, en utilisant la formule des probabilités totales,
$$\mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(X \leq x \cap "P") + \mathbb{P}(X \leq x \cap "F") = \mathbb{P}(X \leq x \,|\, "P")\,\mathbb{P}("P") + \mathbb{P}(X \leq x \,|\, "F")\,\mathbb{P}("F") = \frac{1}{2}\Big((1 - e^{-\lambda_1 x}) + (1 - e^{-\lambda_2 x})\Big).$$
On en déduit que $F_X(x) = 1 - \frac{1}{2}\big(e^{-\lambda_1 x} + e^{-\lambda_2 x}\big)$.
Cette fonction est continue et même dérivable sur $\mathbf{R}^*$ (en 0 on a bien $F_X(x) \to 0$ quand $x \to O^+$). On en déduit donc que X est une variable aléatoire continue qui admet une densité $f_X(x) = (F_X(x))'$. Si $x > 0$, on obtient ainsi $f_X(x) = \frac{1}{2}\Big(\lambda_1\, e^{-\lambda_1 x} + \lambda_2\, e^{-\lambda_2 x}\Big)$ et si $x \leq 0$, $f_X(x) = 0$.
3. On a $\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\, dx = \frac{1}{2}\big(\mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2]\big)$ où $X_1 \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{E}(\lambda_1)$ et $X_2 \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{E}(\lambda_2)$. D'où $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{2}\big(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\big)$.
De la même manière $\mathrm{var}(X) = \frac{1}{2}\big(\mathbb{E}[X_1^2] + \mathbb{E}[X_2^2]\big) - (\mathbb{E}[X])^2$. Mais $\mathrm{var}(X_1) = \mathbb{E}[X_1^2] - \lambda_1^{-2} = \lambda_1^{-2}$, d'où $\mathbb{E}[X_1^2] = 2\,\lambda_1^{-2}$. On en déduit que:
$$\mathrm{var}(X) = \Big(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2}\Big) - \Big(\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\Big)\Big)^2 = \frac{3}{4}\Big(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\Big)^2 + \frac{1}{\lambda_1\lambda_2}.$$
4. On doit résoudre $F_X(m) = \frac{1}{2}$, soit $1 - \frac{1}{2}\big(e^{-\lambda_1 m} + e^{-2\lambda_1 m}\big) = \frac{1}{2}$, ou encore $e^{-\lambda_1 m} + e^{-2\lambda_1 m} = 1$. On pose $Z = e^{-\lambda_1 m}$. On doit résoudre $Z^2 + Z = 1$, qui admet 2 solutions: $Z = (-1 - \sqrt{5})/2$ et $Z = (-1 + \sqrt{5})/2$. Comme $Z > 0$ (exponentielle), la seule solution est $e^{-\lambda_1 m} = (\sqrt{5} - 1)/2$, soit $m = \frac{\ln(2) - \ln(\sqrt{5} - 1)}{\lambda_1}$.
5. Soit l'événement $A = "X > 1/\lambda_1"$. On cherche $\mathbb{P}("P" \mid A)$. Mais $\mathbb{P}("P" \mid A) = \frac{\mathbb{P}("P" \,\cap\, A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A \,|\, "P")\,\mathbb{P}("P")}{\mathbb{P}(A)}$. Or $\mathbb{P}("P") = 1/2$ et $\mathbb{P}(A) = 1 - F_X(1/\lambda_1) = \frac{1}{2}\big(e^{-1} + e^{-2}\big)$. Enfin, $\mathbb{P}(A \mid "P") = 1 - F_{X_1}(1/\lambda_1) = e^{-1}$. On en déduit que:
$$\mathbb{P}("P" \mid A) = \frac{1}{2}\,\frac{e^{-1}}{\frac{1}{2}\big(e^{-1} + e^{-2}\big)} = \frac{e^{-1}}{e^{-1} + e^{-2}}.$$

□

Exercice 2 (Sur 12 points)

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\Big\{-n, -(n-1), \ldots, 0, \ldots, (n-1), n\Big\}$ telle que pour $k \in \{1, \ldots, n\}$, $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X = -k) = \dfrac{1}{4^k}$.

1. Pour cette question uniquement on suppose $n = 1$. Déterminer $\mathbb{P}(X = 0)$ **(0.5pts)**. Représenter la fonction de répartition de X **(1.5pts)**. Calculer $\mathbb{E}[X]$ **(0.5pts)** et $\mathrm{var}(X)$ **(0.5pts)**.
2. On suppose désormais n quelconque. Démontrer que $\mathbb{P}(X = 0) = \dfrac{1}{3}\Big(1 + \dfrac{2}{4^n}\Big)$ **(2pts)**.
3. Calculer $\mathbb{E}[X]$ **(1.5pts)**.
4. Démontrer que $\mathbb{E}[|X|^n] < \infty$ **(1pt)** puis que $\mathbb{E}[|X|^n] \geq 2\,(n/4)^n$ **(1.5pts)**. Quelle est la limite de $\mathbb{E}[|X|^n]$ quand $n \to +\infty$ **(0.5pts)**?
5. Soit A l'événement "$X \geq 1$". Déterminer $\mathbb{P}(X = 1 \mid A)$ **(1.5pts)**. Les événements "$X = 1$" et A sont-ils indépendants **(0.5pts)**? Déterminer également $\mathbb{P}(A \mid X = 1)$ **(0.5pts)**.

Proof.

1. On a $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - \mathbb{P}(X = 1) - \mathbb{P}(X = -1)$ car la somme des probas vaut 1, d'où $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - 1/4 - 1/4 = 1/2$.
   Pour $x < -1$, $F_X(x) = 0$, pour $-1 \leq x < 0$, $F_X(x) = 1/4$, pour $0 \leq x < 1$, $F_X(x) = 3/4$ et pour $x \geq 1$, $F_X(x) = 1$.
   On a $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{4} * (-1) + \frac{1}{2} * (0) + \frac{1}{4} * (1) = 0$.
   $\mathrm{var}(X) = \frac{1}{4} * (1)^2 + \frac{1}{2} * (0)^2 + \frac{1}{4} * (1)^2 = \frac{1}{2}$.
2. On a $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - 2\sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X = k) = 1 - 2\sum_{k=1}^n 4^{-k}$. Mais $\sum_{k=1}^n 4^{-k}$ est la somme des termes d'une suite géométrique de raison 1/4, d'où $\sum_{k=1}^n 4^{-k} = \frac{1}{4}\frac{1-4^{-n}}{1-1/4} = \frac{1}{3}\big(1 - 4^{-n}\big)$. D'où
   $$\mathbb{P}(X = 0) = 1 - 2\frac{1}{3}\big(1 - 4^{-n}\big) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}4^{-n}.$$
3. On a $\mathbb{E}[X] = 0 * \mathbb{P}(X = 0) + \sum_{k=1}^n k\,\mathbb{P}(X = k) + \sum_{k=1}^n (-k)\,\mathbb{P}(X = -k) = 0 + \sum_{k=1}^n k\,\mathbb{P}(X = k) + \sum_{k=1}^n (-k)\,\mathbb{P}(X = k) = 0$ puisque $\mathbb{P}(X = -k) = \mathbb{P}(X = k)$.
4. On a $\mathbb{E}[|X|^n] = 0^n * \mathbb{P}(X = 0) + \sum_{k=1}^n k^n\,\mathbb{P}(X = k) + \sum_{k=1}^n |-k|^n\,\mathbb{P}(X = -k) = 2\sum_{k=1}^n k^n\,4^{-k}$. Mais $k^n \leq n^n$ pour tout $1 \leq k \leq n$, donc $\mathbb{E}[|X|^n] \leq n^n\,2\sum_{k=1}^n 4^{-k} \leq n^n < \infty$.
   Par ailleurs, $2\sum_{k=1}^n k^n\,4^{-k} \geq 2\,n^n\,4^{-n} = 2\,(n/4)^n$ en prenant juste le terme pour $k = n$, les autres termes étant positifs. Or $(n/4)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc $\mathbb{E}[|X|^n] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
5. On a $\mathbb{P}(X = 1 \mid A) = \mathbb{P}(X = 1\ \cap\ A)/\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(X = 1)/\mathbb{P}(A)$. Mais $\mathbb{P}(X = 1) = 1/4$ et $\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^n 4^{-k} = \frac{1}{3}\big(1 - 4^{-n}\big)$.
   Donc $\mathbb{P}(X = 1 \mid A) = \frac{3}{4}\,\frac{1}{1-4^{-n}}$.
   On a $\mathbb{P}(X = 1) = 1/4 \neq \mathbb{P}(X = 1 \mid A)$ donc les 2 événements sont indépendants.
   Par ailleurs $\mathbb{P}(A \mid X = 1) = 1$ car si $X = 1$ alors nécessairement $X \geq 1$.

$\square$