Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Première Année Licence M.A.S.H.S. 2018 – 2019

Probabilités

Examen de juin 2019

Examen de 2h00. Tout document ou calculatrice est interdit.

Exercice 1 (Sur 9 points)

Soit des sujets d'examen numérotés de 1 à 4. On utilise différentes procédures pour choisir le sujet.

1. Dans un premier temps, le choix se fait en donnant une probabilité à chaque sujet qui est proportionnelle à son numéro (donc le sujet 3 a 3 fois plus de chances d'être choisi que le sujet 1). Donner l'espace de probabilités de cette expérience aléatoire en précisant la tribu et la loi de probabilité **(2pts)**. Quelle est la probabilité d'avoir un sujet de numéro pair **(0.5pts)**?
2. On trouve finalement que la procédure de choix est un peu déséquilibrée. On la complète en refaisant un tirage au sort: si le sujet i est sorti, alors on choisi de manière uniforme un sujet j entre 1 et i. Si on note les évènements élémentaires comme les couples (i, j), préciser alors l'espace fondamental Ω et la tribu associée $\mathcal{A}$ **(2pts)**. Déterminer la probabilité d'avoir j sachant i **(1pt)**. En déduire la loi de probabilité du couple (i, j) **(1pt)**. Quelle est cette loi **(0.5pts)**?
3. Pour un couple (i, j) choisi comme dans la question précédente, on retient finalement uniquement le sujet j. Déterminer l'espace de probabilités final, en précisant la loi de probabilité **(2pts)**?

Exercice 2 (Sur 15 points)

Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, \ln(10)[$ (densité $= \frac{1}{\ln(10)}$ sur $[0, \ln(10)[$, 0 sinon).

1. Déterminer par le calcul la fonction de répartition de U ainsi que son espérance **(2pts)**.
2. On note $X = \exp(U)$. Quel est l'ensemble des valeurs prises par X **(0.5pts)**? Déterminer la fonction de répartition de X **(1.5pts)** puis en déduire que sa densité de probabilité est $f_X(x) = 1/(x \ln(10))$ pour $x \in [1, 10[$ et 0 sinon **(1pt)**. En déduire son espérance et sa variance **(2pts)**.
3. On considère maintenant Z la partie entière de X, c'est-à-dire que si on note $n \in \mathbf{Z}$ tel que $n \leq X < n+1$ alors $Z = n$. Quelles sont les valeurs prises par Z **(0.5pts)**? Déterminer la loi de probabilité de Z **(1.5pts)**. Cette loi, appelée loi de Benford, est intéressante car elle permet de modéliser par exemple le premier chiffre d'un numéro dans une rue, d'un impôt,...
4. Soit maintenant V la variable qui vaut 1 si Z vaut 1 et 0 si $Z \neq 1$. Montrer que $\mathbb{E}(V) = \ln(2)/\ln(10) \simeq 0.3$ **(1.5pts)**. Si on considère 100 variables indépendantes $(V_i)_{1 \leq i \leq 100}$ de même loi que V, et si l'on note $\overline{V}_{100} = (X_1 + \ldots + X_{100})/100$, montrer alors que
$$\mathbb{P}\Big(0.3 - 1.96\,\frac{\sqrt{0.21}}{10} \leq \overline{V}_{100} \leq 0.3 + 1.96\,\frac{\sqrt{0.21}}{10}\Big) \simeq 0.95 \quad \textbf{(2.5pts)}.$$
5. On observe 100 premiers chiffres de numéros de rues pris au hasard sur internet. On obtient:

Premier chiffre du numéro	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Effectif	36	19	11	7	7	4	7	5	4

Tracer le diagramme en bâton et le polygône des fréquences cumulées **(1.5pts)**. Le nombre de 1 vous semble-t-il cohérent avec une modélisation par la loi de Benford **(0.5pts)**?