Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Première Année Licence M.A.S.H.S. 2018 – 2019

Probabilités

Examen final, Mai 2019

Examen de 2h00. Tout document ou calculatrice est interdit.

Exercice 1 (Sur 9 points)

On note X et X' deux variables aléatoires définies sur le même espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, suivant respectivement les lois $\mathcal{B}(p)$ et $\mathcal{B}(p')$, où $0 \leq p, p' \leq 1$.

1. Déterminer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(X')$ **(0.5pts)**.
2. Quelle sont les valeurs prises par le produit $X\,X'$ **(0.5pts)**? En déduire le type de loi suivie par $X\,X'$ **(0.5pts)**.
3. Montrer que si $\mathrm{cov}(X, X') = 0$ alors on peut explicitement donner la loi de $X\,X'$ **(1pt)**. En déduire que $\mathbb{P}(X = 1 \cap X' = 1) = \mathbb{P}(X = 1)\,\mathbb{P}(X' = 1)$ **(1pt)** et $\mathbb{P}(X = 0 \cap X' = 1) = \mathbb{P}(X = 0)\,\mathbb{P}(X' = 1)$ **(1.5pts)**, puis que X et X' sont indépendantes **(1pt)**.
4. Déterminer la loi de $Y = 2X - 1$ **(0.5pts)**. Les variables Y et X sont-elles indépendantes **(1pt)**? Et Y^2 et X **(1.5pts)**?

Exercice 2 (Sur 10 points)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités.

1. Pour (E_1, E_2, E_3) trois événements de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, montrer que

$$\mathbb{P}(E_3 \cap E_2 \cap E_1) = \mathbb{P}(E_3 \mid E_2 \cap E_1)\mathbb{P}(E_2 \mid E_1)\mathbb{P}(E_1) \quad \textbf{(1pt)}.$$

2. On considère un jeu vidéo, où l'on peut chaque jour grimper d'un niveau ou rester au même niveau. On note A_j l'événement "Grimper d'un niveau le jour j", pour $j = 1, 2$ ou 3. Le jour 1 on a une probabilité $q > 1/2$ de grimper d'un niveau. Pour $j = 1$ ou 2, quand le jour j on a grimpé d'un niveau, cela fatigue et on a alors une probabilité $(1 - q)$ de grimper d'un niveau le jour $j + 1$. Mais si on est resté au même niveau le jour j, on a la probabilité q de passer au niveau supérieur le lendemain. Déterminer la probabilité d'avoir gagné 3 niveaux en 3 jours **(1pt)**, et celle d'être resté au même niveau en 3 jours **(1.5pts)**.
3. Déterminer la probabilité d'avoir gagné 2 niveaux en 3 jours **(2pts)** et en déduire celle d'avoir gagné un seul niveau **(0.5pts)**.
4. On suppose que l'on a gagné 2 niveaux en 3 jours. Quelle est la probabilité que l'on ait gagné un niveau le premier jour **(2pts)**?
5. A quelle condition sur q le fait de gagner un niveau est-il indépendant du résultat de la veille **(1pt)**? Dans ce cas, déterminer sans calcul la formule de la probabilité de gagner 2 niveaux **(1pt)**.

Exercice 3 (Sur 10 points)

On s'intéresse au temps (en secondes) mis pour se connecter à un réseau, sachant qu'à partir d'un certain temps inconnu il y a déconnexion automatique. On modélise le temps de connexion T comme une variable aléatoire continue de densité

$$f_T(t) = \begin{cases} C\,\sqrt{\tau - t} & \text{si } 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

où $\tau > 0$ et C est un réel,

1. Montrer que $C = \frac{3}{2}\,\tau^{-3/2}$ **(1pt)**.
2. Montrer que $\mathbb{E}(T) = \frac{2}{5}\,\tau$ (on pourra utiliser le changement de variable $t' = \tau - t$) **(2pts)**.
3. Montrer que $\mathrm{var}(T) \leq \tau^2$ **(1pt)**. On peut montrer (ne pas le faire !) que $\mathrm{var}(T) = \frac{12}{175}\,\tau^2$.
4. On observe maintenant 100 variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi de densité f_T. En notant $q \simeq 1.96$ et $\overline{T}_{100} = \frac{1}{100}\sum_{k=1}^{100} T_k$, montrer que

   $$\mathbb{P}\Big(-q\,\sqrt{\frac{12}{175}}\,\tau \leq 10(\overline{T}_{100} - \frac{2}{5}\,\tau) \leq q\,\sqrt{\frac{12}{175}}\,\tau\Big) \simeq 0.95 \quad \textbf{(1.5pts)}.$$

   En déduire un intervalle de confiance à 95% sur τ (on utilisera le fait que $q\,\sqrt{\frac{12}{175}} \simeq 1/2$) **(2.5pts)**.
5. On note par classes les différentes valeurs observées:

Temps en secondes	Effectifs
[0 , 4]	34
[4 , 8]	18
[8 , 12]	23
[12 , 16]	14
[16 , 20]	11

   Tracer l'histogramme relatif à ces données **(0.5pts)**. Déterminer une approximation de la moyenne empirique **(1pt)**. En déduire l'intervalle de confiance à 95% sur τ **(0.5pts)**.