

Première Année Licence M.A.S.H.S. 2021 – 2022

Probabilités

Examen final, Mai 2022

*Examen de 2h00. Tout document ou calculatrice est interdit.***Exercice 1 (Sur 10 points)**

On note X_0 une variable aléatoire définie sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ qui suit une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$. On note également X_1 une variable aléatoire définie également sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, qui ne prend que les valeurs 0 et 1 et telle que:

$$\mathbb{P}(X_1 = 1 \mid X_0 = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_1 = 0 \mid X_0 = 0) = q,$$

où p et q sont deux réels fixés dans $]0, 1[$.

1. Déterminer par le calcul $\mathbb{E}[X_0]$ puis $\mathbb{E}[X_0^k]$ pour $k \in \mathbf{N}^*$ (**1pt**).
2. Déterminer en justifiant $\mathbb{P}(X_1 = 0 \mid X_0 = 1)$ et $\mathbb{P}(X_1 = 1 \mid X_0 = 0)$ (**1pt**).
3. Démontrer que X_1 suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}(p + 1 - q)$ (**1pt**).
4. A quelles conditions sur p et q les variables X_0 et X_1 sont-elles indépendantes? (**1.5pts**).
5. Plus généralement, on considère la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\{0, 1\}$ et telles que pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 1 \mid X_n = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_{n+1} = 0 \mid X_n = 0) = q.$$

Si on note p_n le paramètre de la loi de Bernoulli suivie par X_n , montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $p_{n+1} = p_n(p + q - 1) + (1 - q)$ pour $n \in \mathbf{N}^*$ (**1pt**). Montrer par récurrence que

$$p_n = \frac{q - p}{2(2 - p - q)} (p + q - 1)^n + \frac{1 - q}{2 - p - q} \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{N} \text{ (3pts)}.$$

En déduire que (X_n) converge en loi vers une loi que l'on précisera (**1.5pts**).

Exercice 2 (Sur 4 points)

En 2010, le magazine Causette avait mené une enquête sur les liens entre les orientations politiques des femmes politiques et leur couleur de cheveux. En arrondissant les chiffres et en schématisant, on obtenait que 50% des politiciennes de droite (D) et d'extrême droite (ED) étaient blondes quand seules 15% des politiciennes de gauche (G) l'étaient. Et à l'époque, la droite et la gauche représentaient chacune 40% des politiciennes, l'extrême droite 20%. Une politicienne inconnue arrivait en 2010 vers vous, elle n'était pas blonde. Quelle est la probabilité qu'elle était de gauche?

Exercice 3 (Sur 14 points)

On s'intéresse au niveau de crue maximum (en mètres) atteint par une rivière chaque année. On modélise ce niveau par une variable aléatoire X de fonction de répartition

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - (1 + x)^{-\alpha} & \text{si } 0 \leq x \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

où $\alpha > 2$ est un paramètre inconnu.

1. Montrer que X est variable aléatoire continue et déterminer sa densité de probabilité f_X **(1.5pts)**.
2. Démontrer que $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\alpha - 1}$ puis que $\text{var}(X) = \frac{\alpha}{(\alpha - 1)^2(\alpha - 2)}$ **(2.5pts)**.
3. Afin de construire une digue de taille suffisante, on cherche à connaître le niveau $N > 0$ tel qu'il n'y ait exactement qu'une chance sur 100 d'avoir une crue supérieure à N . Comment appelle-t-on N pour la distribution de X α **(0.5pts)**? Déterminer N en fonction de α **(1pt)**.
4. Par la suite on veut déterminer un intervalle de confiance sur α pour en déduire un intervalle de confiance sur N . On a un historique des 400 dernières années de crue. Pour en tenir compte, on considère 400 variables aléatoires X_i , $i = 1, \dots, 400$ indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi de densité f_X . On note \bar{X} la moyenne empirique des X_i , $i = 1, \dots, 400$. Démontrer que

$$\mathbb{P}\left(\bar{X} \geq \frac{100}{\alpha - 1}\right) \leq 0.01 \quad \text{(2.5pts)}.$$

En déduire que $\mathbb{P}\left(N \geq 100 \frac{\bar{X}}{100 + \bar{X}} - 1\right) \geq 0.99$ **(1pt)**. Qu'en déduire **(0.5pts)**?

5. On note $\overline{\sigma^2} = \frac{1}{400} \sum_{i=1}^{400} (X_i - \bar{X})^2$. Donner la loi approximative de \bar{X} en fonction de $\overline{\sigma^2}$ **(0.5pts)**.

En notant q un quantile (on précisera lequel?) de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$, en déduire un intervalle de confiance de $(\alpha - 1)^{-1}$ de niveau 99% en fonction de \bar{X} et de $\overline{\sigma^2}$ **(0.5pts)**, puis un intervalle de confiance de N de niveau 99% **(1pt)**.

6. On note par classes les différentes valeurs observées:

Hauteur maximale de crue en mètres	Effectifs
[0, 1[356
[1, 2[20
[2, 3[16
[3, 4[4
[4, 5[4

Tracer le polygone des fréquences cumulées de ces données **(0.5pts)**. En déduire une première approximation de N **(1pt)**. Déterminer une approximation de la moyenne empirique **(0.5pts)** et en déduire une seconde approximation de N **(0.5pts)**.