
Examen

La durée de l'épreuve est fixée à **1h15**. Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif. L'utilisation de documents écrits ou d'équipements électroniques n'est pas autorisée.

EXERCICE 1 [6 points]

Un taxi dessert 4 villages A, B, C, D situés aux sommets d'un rectangle. Les routes entre les villages suivent les côtés du rectangle, les côtés longs ont pour longueur 10 km, les côtés courts 5 km. Après avoir conduit un client, le chauffeur attend sans bouger l'appel suivant. Les appels viennent des 4 villages de manière équiprobable, et chaque client se rend du village d'où il appelle dans l'un des 3 autres villages de manière équiprobable. Le taxi suit toujours la route la plus courte entre 2 villages (s'il y a deux chemins de même longueur, il prend l'un ou l'autre, ceci n'a pas d'importance). Les distances à l'intérieur d'un même village sont considérées comme négligeables.

On note d la distance parcourue pour une course (c'est-à-dire la distance parcourue, après un appel, pour aller chercher le client et le conduire à destination). Calculer la loi de d et son espérance.

EXERCICE 2 [6 points]

Pierre joue à un jeu de société avec Louise. Pierre commence la partie, il doit lancer deux dés. S'il fait un double (i.e. si les deux dés affichent le même chiffre), il a le droit de rejouer. Soit n le tour auquel Louise joue pour la première fois (par exemple, si Pierre ne fait pas un double au premier tour, Louise joue au deuxième tour et donc $n = 2$). Calculer la loi de n et son espérance.

EXERCICE 3 [8 points]

Soit Ω un espace muni d'une probabilité P . Soit $p \in]0, 1[$ et soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur Ω , indépendantes et identiquement distribuées, avec :

$$P(\{X = 1\}) = p, \quad P(\{X = -1\}) = 1 - p$$

- Calculer l'espérance et la variance de X , de Y et de XY .
- On pose $Z_1 = |X|$ et $Z_2 = |X|Y$.
 - Les variables X et XY sont-elles indépendantes? (Démontrer votre réponse.)
 - Même question pour les variables X et Z_1 , X et Z_2 , Y et Z_2 .