Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Première Année Master M.A.E.F. 2021 – 2022

Econométrie II

Contrôle continu n°1, mars 2022

Examen de 1h30. Tout document ou calculatrice est interdit.

Soit p suites indépendantes de v.a.i.i.d. $(W_i^{(j)})_{i\in\mathbf{N},\,1\le j\le p}$ telles que $\mathbb{E}[W_0^{(j)}]=m_j\in\mathbf{R}$ et $\mathrm{var}(W_0^{(j)})=\sigma_j^2>0$ pour $j=1,\cdots,p$. Soit $(Y_i)_{i\in\mathbf{N}}$ la suite de variables aléatoires définie par:

$$Y_i=\theta_0+\sum_{k=1}^{p}\theta_k\,W_i^{(k)}+\varepsilon_i \qquad \text{pour tout } i\in\mathbf{N}, \text{ où:} \tag{1}$$

$\theta={}^t(\theta_0,\theta_1,\ldots,\theta_p)$ est un vecteur composé de $p+1$ réels inconnus et la suite $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbf{N}}$ est une suite non observée de v.a.i.i.d. de loi gaussienne centrée de variance $\sigma^2>0$, indépendante de $(W_i^{(j)})_{i\in\mathbf{N},\,1\le j\le p}$.

1. On note $\varepsilon^{(n)}=(\varepsilon_i)_{1\le i\le n}$. Préciser la loi de $\varepsilon^{(n)}$. La loi de Y_i est-elle gaussienne?

2. Pour $i\in\mathbf{N}$ et $j=1,\cdots,p$, soit $Z_i^{(j)}=W_i^{(j)}-m_j$. Déterminer $\mathbb{E}[Z_i^{(j)}]$ et $\mathrm{var}(Z_i^{(j)})$.

3. Ecrire le modèle (1) sous la forme $Y_i=\beta_0+\sum_{k=1}^{p}\beta_k\,Z_i^{(k)}+\varepsilon_i$ pour tout $i\in\mathbf{N}$, en explicitant les β_k en fonction des θ_k.

4. Pour $n\ge p+1$, soit X_n la matrice de taille $(n,p+1)$ telle que la première colonne de X_n est constituée de 1, et pour $j=1,\cdots,p$, la colonne $j+1$ de X_n est constituée de $Z_1^{(j)},\cdots,Z_n^{(j)}$. Ecrire en détail $\frac{1}{n}\,{}^tX_n\,X_n$, et en déduire que $(\frac{1}{n}\,{}^tX_n\,X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ tend p.s. vers une limite lorsque $n\to\infty$ et la préciser. En déduire que la suite de matrices $((\frac{1}{n}\,{}^tX_n\,X_n)^{-1})_{n\in\mathbf{N}^*}$ existe p.s. lorsque n est suffisamment grand et préciser sa limite Σ lorsque $n\to\infty$ en fonction des σ_j^2.

5. On a observé $Y^{(n)}=(Y_i)_{1\le i\le n}$ et X_n. Déterminer la loi de $Y^{(n)}$ sachant X_n. Pour n suffisamment grand, déterminer la loi sachant X_n de l'estimateur $\widehat{\beta}^{(n)}$ par moindres carrés de β. Montrer que
$$\sqrt{n}\,(\widehat{\beta}^{(n)}-\beta)\ \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}}\ \mathcal{N}(0\,,\,\sigma^2\,\Sigma). \tag{2}$$

6. Lorsqu'elle existe on définit la matrice $H^{(n)}=(H_{ij}^{(n)})_{1\le i,j\le n}=X_n\,({}^tX_n\,X_n)^{-1}\,{}^tX_n$. Pour $i\in\{1,\ldots,n\}$, montrer que $H_{ii}^{(n)}={}^tz_i\,({}^tX_n\,X_n)^{-1}z_i$ où $z_i={}^t(1,Z_i^{(1)},\ldots,Z_i^{(p)})$. Avec $\lambda^{(n)}$ la plus grande valeur propre de $({}^tX_n\,X_n)^{-1}$, en déduire que $H_{ii}^{(n)}\le\lambda^{(n)}\,\|z_i\|^2$, puis qu'il existe un réel $C>0$ et une variable aléatoire N_0 tel que pour tout $n\ge N_0$, tel que pour tout $i\in\{1,\ldots,n\}$, $H_{ii}^{(n)}\le\frac{C}{n}\,\|z_i\|^2$ presque sûrement.

7. On note $\widehat{Y}^{(n)}=X_n\,\widehat{\beta}^{(n)}$, $\widehat{\varepsilon}^{(n)}=(\widehat{\varepsilon}_i^{(n)})_{1\le i\le n}=Y^{(n)}-\widehat{Y}^{(n)}$ et $\widehat{\sigma}_n^2=\frac{1}{n-p-1}\sum_{i=1}^n(\widehat{\varepsilon}_i^{(n)})^2$. Montrer que $\widehat{\sigma}_n^2\ \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}}\ \sigma^2$. En vous servant de la question 6., montrer que $\dfrac{\widehat{\varepsilon}_i^{(n)}}{\widehat{\sigma}_n}\ \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}}\ \mathcal{N}(0,1)$ pour tout $1\le i\le n$.

8. Soit une suite de v.a.i.i.d. positives $(U_i)_{i\in\mathbf{N}}$ de loi de probabilité $\mathbb{P}_U$ telle que $\mathbb{E}[U_i]<\infty$. Montrer que pour tout $x>0$, $\displaystyle\int_{nx}^{\infty}t\,d\mathbb{P}_U(t)\ \xrightarrow[n\to\infty]{}\ 0$ puis que $n\,\mathbb{P}(U_0>nx)\ \xrightarrow[n\to\infty]{}\ 0$. Pour $M_n=\dfrac{1}{n}\max\limits_{1\le i\le n}U_i$, déduire de ce qui précède que $\mathbb{P}(M_n\ge x)\ \xrightarrow[n\to\infty]{}\ 0$ puis que $\max\limits_{1\le i\le n}|H_{ii}^{(n)}|\ \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}}\ 0$.

9. On peut même montrer (ne pas le faire!) que $\max\limits_{1\le i\le n}|H_{ii}^{(n)}|\ \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.}\ 0$. Qu'en déduire pour (2)?