Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Première Année Master M.A.E.F. 2018 – 2019

Econométrie II

Contrôle continu n°2, avril 2019

Examen de 1h30. Tout document ou calculatrice est interdit.

1. **(Sur 27 points)** Soit $(Y_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille de variables aléatoires définie par:

$$Y_i = \theta_0 + \sum_{k=1}^{p} \theta_k\, X_i^{(k)} + \varepsilon_i \qquad \text{pour tout } i \in \{1,\dots,n\}, \qquad \text{où:} \tag{1}$$

- $\theta = {}^t(\theta_0,\theta_1,\dots,\theta_p)$ est un vecteur composé de $p+1$ réels inconnus.
- pour $1 \leq k \leq p$, les $(X_i^{(k)})_{1\leq i\leq n}$ sont p familles de réels connues telles que la matrice $X = \begin{pmatrix} 1 & X_1^{(1)} & \cdots & X_1^{(p)} \\ 1 & X_2^{(1)} & \cdots & X_2^{(p)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & X_n^{(1)} & \cdots & X_n^{(p)} \end{pmatrix}$ soit une matrice de rang $p+1$ (on suppose que $p<n$).
- pour $0<\tau<1$, connu, et $n_1=[n\tau]$ (partie entière de $n\tau$), avec $(\xi_i)_{i\in\mathbf{N}}$ une suite de v.a.i.i.d. de loi gaussienne centrée réduite, $\varepsilon_i=\sigma_1\,\xi_i$ pour $1\leq i\leq n_1$ et $\varepsilon_i=\sigma_2\,\xi_i$ pour $n_1+1\leq i\leq n$ avec $0<\sigma_1\neq\sigma_2>0$.

Par ailleurs, pour tout $k\in\mathbf{N}^*$, et pour M une matrice carrée de taille k, on note $\|M\| = \sup_{U\in(\mathbf{R}^k)^*} \dfrac{\|M\,U\|}{\|U\|}$, où pour $V\in\mathbf{R}^k$, $\|V\|^2={}^tV\,V$. On rappelle que pour A et B deux matrices carrées de taille k, $\|A\,B\|\leq\|A\|\,\|B\|$.

(a) On note $Y=(Y_i)_{1\leq i\leq n}$ et $\varepsilon=(\varepsilon_i)_{1\leq i\leq n}$. Ecrire le modèle (1) sous une forme vectorielle, en précisant la loi de l'erreur ε, en précisant $\Sigma=\operatorname{cov}(\varepsilon)$ **(1pt)**.

(b) Donner l'expression de la log-vraisemblance de $(Y_1,\cdots,Y_n)$ **(1pt)**. En supposant σ_1^2 et σ_2^2 connus, déterminer sous forme matricielle l'estimateur $\widehat{\theta}$ par maximum de vraisemblance **(2pts)**. En supposant θ connu, déterminer explicitement les estimateurs $\widehat{\sigma}_1^2$ et $\widehat{\sigma}_2^2$ de σ_1^2 et σ_2^2 (respectivement) par maximum de vraisemblance **(2pts)**. Expliquer pourquoi une expression explicite de l'estimateur par maximum de vraisemblance de θ,σ_1^2 et σ_2^2 n'est pas possible à obtenir dans le cas général où θ,σ_1^2 et σ_2^2 sont inconnus **(1pt)**.

(c) On va estimer ces paramètres en 2 temps. On commence par estimer θ par moindres carrés ordinaires, et on note $\widehat{\theta}$ cet estimateur. Rappeler son expression, donner son espérance et sa matrice de covariance **(2pts)**.

(d) On note Z_1 (respectivement Z_2) la matrice de taille $(n,p+1)$ dont les lignes de 1 à n_1 (respectivement, de n_1+1 à n) sont celles de X, et les lignes de n_1+1 à n (respectivement, de 1 à n_1) sont constituées de 0. Montrer que pour tout $U\in\mathbf{R}^n$, $\|{}^tX\,X\,U\|^2=\|{}^tZ_1Z_1\,U\|^2+\|{}^tZ_2\,Z_2\,U\|^2$ **(2pts)**. En déduire que $\max\left(\|{}^tZ_1\,Z_1\|\,,\,\|{}^tZ_2\,Z_2\|\right)\leq\|{}^tX\,X\|$ **(1pt)**.

(e) Exprimer ${}^tX\,\Sigma\,X$ en fonction de σ_1, σ_2, Z_1 et Z_2 **(1.5pts)**. En utilisant la question précédente montrer que $\|\operatorname{cov}(\widehat{\theta})\|\leq(\sigma_1^2+\sigma_2^2)\|({}^tX\,X)^{-1}\|$ et donner une condition pour que $\widehat{\theta}\xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}}\theta$ **(3.5pts)**.

(f) Soit $\widehat{\varepsilon} = Y - X\,\widehat{\theta} = (\widehat{\varepsilon}_i)_{1\leq i\leq n}$ et $\widehat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}\widehat{\varepsilon}_i^2$. Montrer que $\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}\varepsilon_i^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} \sigma_1^2$ **(1pt)**. En notant $P_{[X]}$ la matrice de la projection orthogonale sur le sev engendré par X, montrer que $\sum_{i=1}^{n_1}((P_{[X]}\varepsilon)_i)^2 \leq \|P_{[X]}\varepsilon\|^2$ **(1pt)** puis que $\mathbb{E}(\|P_{[X]}\varepsilon\|^2) \leq (\sigma_1^2+\sigma_2^2)\mathrm{Trace}(P_{[X]})$ **(2pts)**. En déduire que $\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}((P_{[X]}\varepsilon)_i)^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} 0$ **(2pts)**, et enfin que $\widehat{\sigma}_1^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} \sigma_1^2$ **(3pts)**.

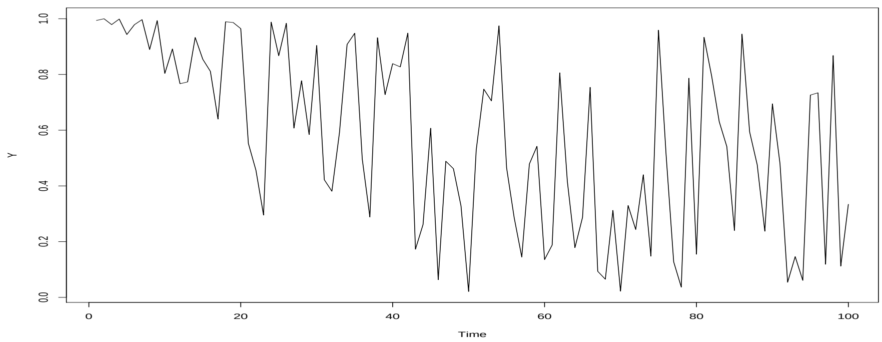
(g) Dans un deuxième temps, on déduit de ce qui précède un estimateur par moindres carrés pseudo-généralisés $\widetilde{\theta}$ de θ. Donner l'expresssion de cet estimateur **(1pt)** et montrer sa convergence **(2pts)**.

2. **(Sur 7 points)** Exercice avec le logiciel R:

(a) On lance les commandes suivantes:

```
n=100; th0=-8; th1=2; sigma=2
X1=log(c(1:n))
Y=1/(1+exp(th0+th1*X1+sigma*rnorm(n)))
plot.ts(Y)
```

Le graphique obtenu est le suivant:



Question 1: Donner le modèle vérifié par Y. Peut-on ainsi escompter les paramètres du modèle? **(1pt)**

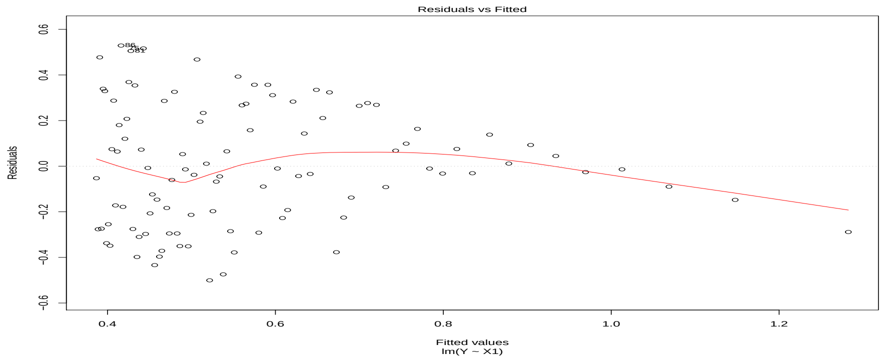
(b) On poursuit avec les commandes:

```
reg1=lm(Y~X1)
summary(reg1)
plot(reg1)
```

Les résultats numériques et graphiques sont les suivants:

```
Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  1.28248    0.10716  11.968  < 2e-16 ***
X1          -0.19449    0.02855  -6.811 7.85e-10 ***

Residual standard error: 0.2637 on 98 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.3213,Adjusted R-squared:  0.3144
F-statistic: 46.39 on 1 and 98 DF,  p-value: 7.855e-10
```



Question 2: Expliquez ce qui a été fait. Que peut-on conclure quant à la régression effectuée et était-ce escompté? **(1.5pts)**

(c) On poursuit avec les commandes qui suivent:

```
library(MASS)
BX=boxcox(Y ~X1,plotit = TRUE,lambda = seq(-3,3))
ind=which(BX$y==max(BX$y))
lambda=BX$x[ind]
lambda
```

Voici le résultat numérique:

```
> lambda
[1] 0.8787879
```

Question 3: Qu'a-t-on fait et qu'obtient-on? Qu'en conclure? **(1pt)**

(d) Voici les dernières commandes:

```
T=as.numeric(Y>1/2)
reg2=glm(T~X1,family=binomial(link="probit"),na.action=na.pass)
summary(reg2)
```

Les résultats numériques et graphiques sont les suivants:

```
Coefficients:
            Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
(Intercept)   4.0143     0.9618   4.174 3.00e-05 ***
X1           -1.0098     0.2436  -4.146 3.38e-05 ***

    Null deviance: 136.66  on 99  degrees of freedom
Residual deviance: 110.71  on 98  degrees of freedom
AIC: 114.71
```

Question 4: Expliquer ce qui a été fait. Montrer mathématiquement pourquoi on a obtenu ces estimations et pourquoi on ne pouvait pas escompter identifier les différents paramètres du modèle initial **(3.5pts)**