Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Première Année Master M.A.E.F. 2018 – 2019

Econométrie II

Examen final, mai 2019

Examen de 3h00. Tout document ou calculatrice est interdit.

1. **(Sur 22 points)** Pour n et p deux entiers tels que $n \geq p$, on observe $Y = {}^t(Y_i)_{1 \leq i \leq n}$ défini par:

$$Y_i = \theta_1 \, X_i^{(1)} + \cdots + \theta_p \, X_i^{(p)} + \varepsilon_i \qquad \text{pour tout } i = 1, \cdots, n, \tag{1}$$

avec une famille connue de réels $(X_i^{(j)})_{1 \leq i \leq n,\, 1 \leq j \leq p}$, telle que $X = \begin{pmatrix} X_1^{(1)} & X_1^{(2)} & \cdots & X_1^{(p)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_n^{(1)} & X_n^{(2)} & \cdots & X_n^{(p)} \end{pmatrix}$ soit une matrice de rang p, $\theta = {}^t(\theta_j)_{1 \leq j \leq p}$ un vecteur de nombres réels inconnus et $\varepsilon = {}^t(\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq n}$, où les (ε_i) sont des v.a.i.i.d. gaussiennes centrées non observées, avec $\mathrm{var}(\varepsilon_1) = \sigma^2 > 0$, inconnue.

Notations: Pour $m \in \mathbf{N}^*$, I_m est la matrice identité de taille m. Pour M une matrice réelle quelconque, ${}^tM$ est la transposée de M. Pour u un vecteur colonne quelconque dans $\mathbf{R}^m$, $\|u\|^2 = {}^tu\,u$. Enfin, pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, on notera $x_i = {}^t(X_i^{(1)}, \ldots, X_i^{(p)})$ et $H = (h_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} = X\,({}^tX\,X)^{-1}\,{}^tX$. On supposera que $|h_{ii}| < 1$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.

(a) On note $\widehat{\theta}$ l'estimateur de θ par moindres carrés ordinaires et $\widehat{\sigma}^2$ l'estimateur non biaisé par moindres carrés ordinaires de σ^2. Rappeler les expressions et les lois de $\widehat{\theta}$ et $\widehat{\sigma}^2$ **(1 pt)**.

(b) On note $\widehat{Y}_i = {}^tx_i\,\widehat{\theta}$ et $\widehat{\varepsilon}_i = Y_i - \widehat{Y}_i$. Déterminer la loi de $\widehat{\varepsilon}_i$ **(1 pt)**. En déduire la loi asymptotique de $\dfrac{\widehat{\varepsilon}_i}{\widehat{\sigma}\sqrt{1 - h_{ii}}}$ **(1 pt)**.

(c) On va maintenant définir des résidus studentisés de manière à pouvoir travailler pour $n \geq p + 1$ quelconque. Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$ fixé, on notera $X_{(-i)}$ la matrice X privée de la ligne i (donc une matrice de taille $(n-1) \times p$ que l'on supposera de rang p) et $Y_{(-i)}$ le vecteur Y privé de Y_i (donc de taille $n - 1$).
Montrer que ${}^tXX = {}^tX_{(-i)}X_{(-i)} + x_i\,{}^tx_i$ **(1.5 pts)**, puis que ${}^tXY = {}^tX_{(-i)}Y_{(-i)} + x_iY_i$ **(0.5pts)**?

(d) Montrer que $\big({}^tXX - x_i\,{}^tx_i\big)^{-1} = \big({}^tXX\big)^{-1} + \dfrac{({}^tXX)^{-1}x_i\,{}^tx_i({}^tXX)^{-1}}{1 - {}^tx_i({}^tXX)^{-1}x_i}$ **(2 pts)**.

(e) Montrer que $h_{ii} = {}^tx_i({}^tXX)^{-1}x_i$ **(1 pt)** et en déduire que $\big({}^tX_{(-i)}X_{(-i)}\big)^{-1} = \big({}^tXX\big)^{-1} + \dfrac{({}^tXX)^{-1}x_i\,{}^tx_i({}^tXX)^{-1}}{1 - h_{ii}}$ **(0.5 pts)**.

(f) Soit $\widehat{Y}_i^{(-i)}$ la prédiction de Y_i à l'aide de l'estimateur par moindres carrés ordinaires du modèle initial privé de l'observation i. Déduire de ce qui précède que $\widehat{Y}_i^{(-i)} = \dfrac{1}{1 - h_{ii}}\,\widehat{Y}_i - \dfrac{h_{ii}}{1 - h_{ii}}\,Y_i$ **(2.5 pts)** et $\widehat{\varepsilon}_i = (1 - h_{ii})(Y_i - \widehat{Y}_i^{(-i)})$ **(1 pt)**.

(g) Soit $\widehat{\sigma}^2_{(-i)}$ l'estimation par moindres carrés ordinaires non biaisé de σ^2 du modèle initial privé de l'observation i. Montrer que $\widehat{\sigma}^2_{(-i)}$ est indépendante de $\widehat{\varepsilon}_i$ **(3 pts)**.

(h) On définit le résidu studentisé par $\widetilde{\varepsilon}_i = \dfrac{\widehat{\varepsilon}_i}{\widehat{\sigma}_{(-i)}\sqrt{1 - h_{ii}}}$. Déterminer la loi de $\widetilde{\varepsilon}_i$ **(1.5 pts)**. A quoi peuvent servir concrètement les $\widetilde{\varepsilon}_i$ **(0.5 pts)**?

(i) Il peut être aussi intéressant d'utiliser les $\widehat{Y}_i^{(-i)}$ pour sélectionner le "meilleur" choix de variables de régression. Pour simplifier, on notera m le modèle associé à X et on définit le critère $\mathrm{PRESS}(m) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \big(Y_i - \widehat{Y}_i^{(-i)}\big)^2$. Expliquer en quelques mots pourquoi et comment ce critère peut permettre d'optimiser un choix de modèle **(0.5 pts)**. Si on suppose que m est le vrai modèle et que m' est un sur-modèle, démontrer que $0 \leq h_{ii}^{(m)} \leq h_{ii}^{(m')}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ **(2 pts)**. En déduire que $\mathbb{E}\big(\mathrm{PRESS}(m)\big) \leq \mathbb{E}\big(\mathrm{PRESS}(m')\big)$ **(2 pts)**. Est-ce ce que l'on espérait **(0.5 pts)**?

Proof. (a) On a $\widehat{\theta} = ({}^tX\,X)^{-1\,t}XY$ et $\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-p}\,\|Y - X\widehat{\theta}\|^2$. Sous les hypothèses de l'énoncé, on a $\widehat{\theta} \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}_p\big(\theta\,,\,\sigma^2({}^tX\,X)^{-1}\big)$ et par Cochran $\widehat{\sigma}^2 \overset{\mathcal{L}}{\sim} \frac{\sigma^2}{n-p}\,\chi^2(n-p)$.

(b) La loi de $\widehat{\varepsilon} = (\widehat{\varepsilon}_i)_{1\le i\le n}$ est celle de $(I_n - H)\varepsilon$, donc $\mathcal{N}\big(0\,,\,\sigma^2(I_n - H)\big)$. Donc celle de $\widehat{\varepsilon}_i$ est $\mathcal{N}\big(0\,,\,\sigma^2(1-h_{ii})\big)$.
D'après le cours, on sait que $\widehat{\sigma}^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} \sigma^2$. On sait que la loi de $\dfrac{\widehat{\varepsilon}_i}{\sigma\,\sqrt{1-h_{ii}}}$ est une $\mathcal{N}(0,1)$ d'après la question précèdente, donc d'après le Lemme de Slutsky, on en déduit que $\dfrac{\widehat{\varepsilon}_i}{\widehat{\sigma}\,\sqrt{1-h_{ii}}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$.

(c) La coordonnée (ℓ,m) de la matrice ${}^tX\,X$ est $\sum_{k=1}^n X_k^{(\ell)}X_k^{(m)}$, celle de ${}^tX_{(-i)}X_{(-i)}$ est $\sum_{k=1,\,k\neq i}^n X_k^{(\ell)}X_k^{(m)}$. Or celle de $x_i{}^tx_i$ est $X_i^{(\ell)}X_i^{(m)}$, d'où le résultat.
De la même manière, la ℓ-ème coordonée du vecteur ${}^tXY$ est $\sum_{k=1}^n X_k^{(\ell)}Y_k$, celle de ${}^tYX_{(-i)}$ est $\sum_{k=1,\,k\neq i}^n X_k^{(\ell)}Y_k$ et celle de x_iY_i est $X_i^{(\ell)}Y_i$.

(d) On a:

$$\begin{aligned}\big({}^tXX - x_i{}^tx_i\big)\left(\big({}^tXX\big)^{-1} + \frac{({}^tXX)^{-1}x_i{}^tx_i({}^tXX)^{-1}}{1-{}^tx_i({}^tXX)^{-1}x_i}\right)&\\ &= I_p - x_i{}^tx_i\big({}^tXX\big)^{-1} + \frac{x_i{}^tx_i({}^tXX)^{-1}}{1-{}^tx_i({}^tXX)^{-1}x_i} - {}^tx_i({}^tXX)^{-1}x_i\,\frac{x_i{}^tx_i({}^tXX)^{-1}}{1-{}^tx_i({}^tXX)^{-1}x_i}\\ &= I_p + \left(-1 + \frac{1}{1-{}^tx_i({}^tXX)^{-1}x_i} - \frac{{}^tx_i({}^tXX)^{-1}x_i}{1-{}^tx_i({}^tXX)^{-1}x_i}\right)x_i{}^tx_i\big({}^tXX\big)^{-1} = I_p.\end{aligned}$$

D'où le résultat.

(e) $h_{ii} = \Big(X\,\big({}^tXX\big)^{-1}{}^tX\Big)_{ii}$. En prenant $\big({}^tXX\big)^{-1} = (a_{ij})$, on a $(X\,\big({}^tXX\big)^{-1})_{ij} = \sum_{k=1}^p X_i^{(k)}a_{kj}$, d'où $h_{ij} = \sum_{\ell=1}^p\sum_{k=1}^p X_i^{(k)}a_{k\ell}X_j^{(\ell)}$, donc $h_{ij} = \sum_{\ell=1}^p\sum_{k=1}^p X_i^{(k)}a_{k\ell}X_i^{(\ell)}$. On peut aussi écrire que ${}^tx_i\big({}^tXX\big)^{-1} = (\sum_{k=1}^p X_i^{(k)}a_{kj})_{1\le j\le p}$, et ainsi ${}^tx_i\big({}^tXX\big)^{-1}x_i = \sum_{\ell=1}^p X_i^{(\ell)}\sum_{k=1}^p X_i^{(k)}a_{k\ell}X_i^{(\ell)} = h_{ii}$.
La relation $\big({}^tX_{(-i)}X_{(-i)}\big)^{-1} = \big({}^tXX\big)^{-1} + \dfrac{({}^tXX)^{-1}x_i{}^tx_i({}^tXX)^{-1}}{1-h_{ii}}$ est immédiate d'après les résultats précédents.

(f) On a $\widehat{Y}^{(-i)} = {}^tx_i\big({}^tX_{(-i)}X_{(-i)}\big)^{-1}{}^tX_{(-i)}Y^{(-i)}$. Comme ${}^tXY = {}^tX_{(-i)}Y_{(-i)} + x_iY_i$ et $\big({}^tX_{(-i)}X_{(-i)}\big)^{-1} = \big({}^tXX\big)^{-1} + \frac{({}^tXX)^{-1}x_i{}^tx_i({}^tXX)^{-1}}{1-h_{ii}}$, on en déduit que

$$\widehat{Y}^{(-i)} = {}^tx_i\big({}^tX_{(-i)}X_{(-i)}\big)^{-1}\big({}^tXY - x_iY_i\big) = {}^tx_i\left(\big({}^tXX\big)^{-1} + \frac{({}^tXX)^{-1}x_i{}^tx_i({}^tXX)^{-1}}{1-h_{ii}}\right)\big({}^tXY - x_iY_i\big),$$

donc en développant $\widehat{Y}^{(-i)} = \widehat{Y}_i + \frac{h_{ii}}{1-h_{ii}}\,\widehat{Y}_i - h_{ii}\,Y_i - \frac{h_{ii}^2}{1-h_{ii}}\,Y_i = \frac{1}{1-h_{ii}}\,\widehat{Y}_i - \frac{h_{ii}}{1-h_{ii}}\,Y_i$.
Comme $\widehat{\varepsilon}_i = Y_i - \widehat{Y}_i$, on déduit que $(1-h_{ii})\widehat{Y}^{(-i)} + h_{ii}Y_i = \widehat{Y}_i$, d'où $\widehat{\varepsilon}_i = Y_i - \big((1-h_{ii})\widehat{Y}^{(-i)} + h_{ii}Y_i\big) = (1-h_{ii})\big(Y_i - \widehat{Y}^{(-i)}\big)$.

(g) On a $\widehat{\sigma}^2_{(-i)} = \frac{1}{n-1-p}\,\|P_{[X_{(-i)}]^\perp}\varepsilon_{(-i)}\|^2$ et $\widehat{\varepsilon}_i = (1-h_{ii})\varepsilon_i - (1-h_{ii})P_{[X_{(-i)}]}\varepsilon_{(-i)}$, $\varepsilon_{(-i)}$ est le vecteur ε privé de sa ligne i, donc de ε_i. Ainsi par hypothèse $\varepsilon_{(-i)}$ est indépendant de ε_i, et comme $\varepsilon_{(-i)}$ est un vecteur gaussien centré isotrope, avec Cochran on sait que $P_{[X_{(-i)}]^\perp}\varepsilon_{(-i)}$ est indépendant de $P_{[X_{(-i)}]}\varepsilon_{(-i)}$. Donc on a bien $\widehat{\sigma}^2_{(-i)}$ indépendant de $\widehat{\varepsilon}_i$.

(h) Comme d'après Cochran $\widehat{\sigma}^2_{(-i)}$ suit une loi $\frac{\sigma^2}{n-1-p}\,\chi^2(n-1-p)$, que $\widehat{\varepsilon}_i/(\sigma\sqrt{1-h_{ii}})$ suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$ et comme $\widehat{\sigma}^2_{(-i)}$ est indépendant de $\widehat{\varepsilon}_i$, on en déduit que $\widetilde{\varepsilon}_i$ suit une loi $t(n-1-p)$.
Les $\widetilde{\varepsilon}_i$ peuvent servir à mettre en évidence des données aberrantes.

(i) Pour chaque i on prévoit Y_i par $\widehat{Y}^{(-i)}$ c'est-à-dire sans utiliser Y_i. On peut penser que le meilleur modèle sera celui qui en moyenne quadratique permettra ainsi la meilleure prédiction des Y_i.
On sait que $[X^{(m)}] \subset [X^{(m')}]$ donc pour tout $U \in \mathbf{R}^n$, $\|P_{[X^{(m)}]}U\|^2 \le \|P_{[X^{(m')}]}U\|^2$. Si on choisit $U = {}^t(0,\dots,0,1,0,\dots,0)$, le 1 étant en i-ème position, on a $\|P_{[X^{(m)}]}U\|^2 = {}^tH^{(m)}U = h_{ii}^{(m)}$ et $\|P_{[X^{(m')}]}U\|^2 = {}^tH^{(m')}U = h_{ii}^{(m')}$, d'où $0 \le h_{ii}^{(m)} \le h_{ii}^{(m')}$.
On a $\mathbb{E}\big(\mathrm{PRESS}(m)\big) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\Big(\big(Y_i - \widehat{Y}_i^{(-i)}\big)^2\Big) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{1}{(1-(h_{ii}^{(m)}))^2}\mathbb{E}(\widehat{\varepsilon}_i^2) = \frac{\sigma^2}{n}\sum_{i=1}^n \frac{1}{1-h_{ii}^{(m)}}$. On en déduit que $\mathbb{E}\big(\mathrm{PRESS}(m)\big) \le \mathbb{E}\big(\mathrm{PRESS}(m')\big)$: c'est bien ce que l'on escomptait, minimiser le critère PRESS avec le vrai modèle...

□

2. **(Sur 10 points)** Exercice de TP utilisant le logiciel `R`

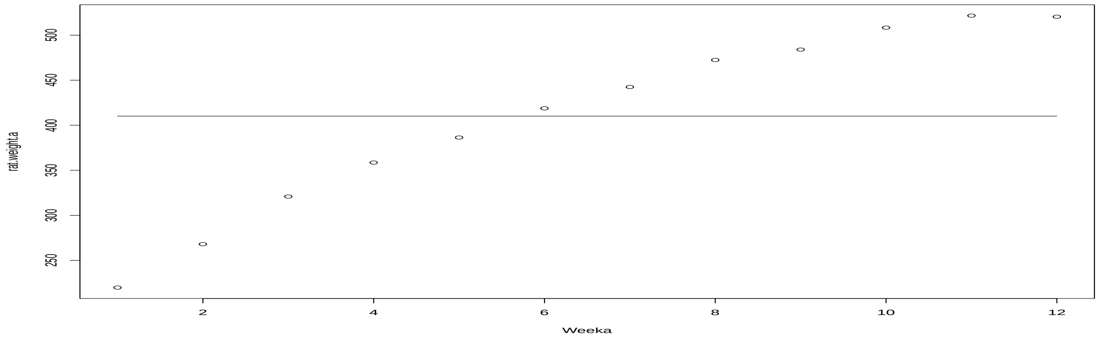
(a) On s'intéresse à la croissance de rats nourris à base de maïs OGM ou bien de maïs sans OGM (ce sont des données réelles...). On commence donc par étudier l'évolution du poids d'un rat immatriculé `B38625`. Soit la suite de commandes suivantes:

```
data.rat <- read.csv("ratWeight.csv")
rat.weight <- subset(data.rat, id=="B38625")
rat.weight.a= rat.weight$weight[1:12]
rat.weight.t= rat.weight$weight[13:14]
Week=c(1:14); Weeka=c(1:12); Weekt=c(13:14)
lm0=lm(rat.weight.a~1); summary(lm0)
plot(Weeka, rat.weight.a); lines(lm0$fitted.values)
```

Voici une part des résultats obtenus:

```
Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)   410.18      29.18   14.06 2.25e-08

Residual standard error: 101.1 on 11 degrees of freedom
```



Questions I.1: Ecrire formellement les différentes variables et le modèle. Que représente la valeur 410.18*? A quoi servent les objets* `rat.weight.a` *et* `rat.weight.t`*? Que pensez vous des résultats obtenus par la régression?* **(2pts)**

(b) On tape ensuite les commandes (la commande `poly` avec l'option `raw=T` permet une régression polynomiale classique):

```
lm1=lm(rat.weight.a~poly(Weeka,degree=1,raw=T))
lm2=lm(rat.weight.a~poly(Weeka,degree=2,raw=T))
lm3=lm(rat.weight.a~poly(Weeka,degree=3,raw=T))
lm4=lm(rat.weight.a~poly(Weeka,degree=4,raw=T))
lm5=lm(rat.weight.a~poly(Weeka,degree=5,raw=T))
BIC(lm0,lm1,lm2,lm3,lm4,lm5)
```

Voici ce que l'on obtient à la fin des résultats:

```
    df       BIC
lm0  2 148.75934
lm1  3 115.38075
lm2  4  78.35984
lm3  5  79.89050
lm4  6  76.23188
lm5  7  76.34590
```

Questions I.2: Qu'a-t-on fait en tapant ces commandes? Que conclure quant aux résultats obtenus? **(1pt)**

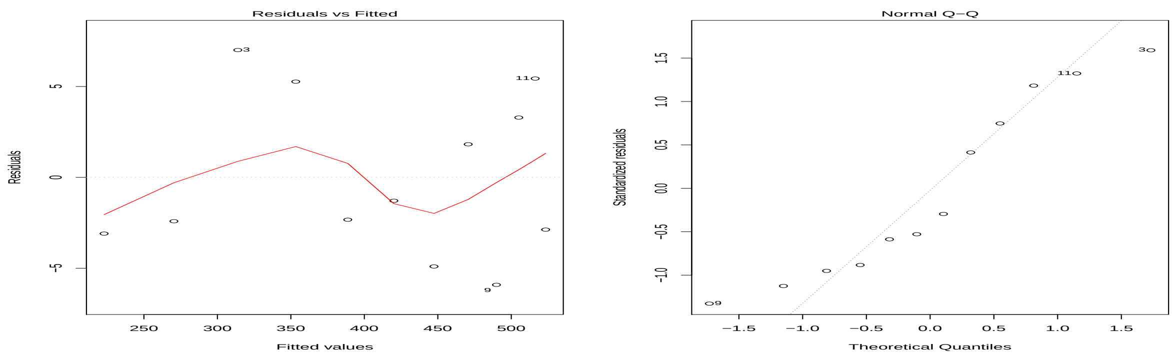
(c) On tape ensuite les commandes:

```
summary(lm2)
par(mfrow = c(1, 2))
plot(lm2, which=c(1,2))
```

Voici ce que l'on obtient à la fin des résultats:

```
Coefficients:
                                  Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)                       171.3341     4.9964   34.29 7.53e-11 ***
poly(Weeka, degree = 2, raw = T)1  53.5810     1.7671   30.32 2.26e-10 ***
poly(Weeka, degree = 2, raw = T)2  -2.0204     0.1323  -15.27 9.67e-08 ***

Residual standard error: 4.834 on 9 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9981,Adjusted R-squared:  0.9977
F-statistic:  2399 on 2 and 9 DF,  p-value: 5.313e-13
```

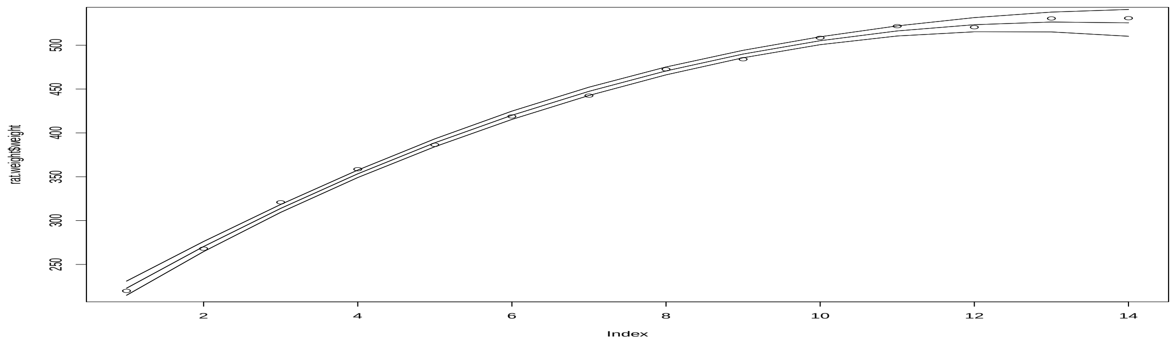


Questions I.3: Qu'a-t-on fait en tapant ces commandes? Ecrire précisément le modèle considéré. Que représente la valeur 30.32*? Que pensez-vous des résultats obtenus?* **(1.5pts)**

(d) On continue ainsi:

```
new=data.frame(Weeka=c(1:14))
poidspred=predict(lm2,newdata=new,interval="confidence",level=0.95)
lines(poidspred[1:14,1]); lines(poidspred[1:14,2]); lines(poidspred[1:14,3])
```

Et on obtient:



Questions I.4: Qu'a-t-on fait en tapant ces commandes? Quelles formules permettent d'obtenir les 3 *courbes? Conclusion?* **(1.5pts)**

(e) Enfin, on en vient aux commandes suivantes, où l'on utilise des polynômes orthogonaux (on enlève l'option `raw=T`):

```
lm2.ortho <- lm(weight ~ poly(week, degree=2), data=rat.weight)
summary(lm2.ortho)
M2 <- model.matrix(lm2.ortho)
head(M2); t(M2)%*%M2
```

Et on obtient:

```
Coefficients:
                        Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)              427.386      1.199  356.36  < 2e-16 ***
poly(week, degree = 2)1  354.841      4.487   79.07  < 2e-16 ***
poly(week, degree = 2)2 -105.409      4.487  -23.49 9.46e-11 ***

Residual standard error: 4.487 on 11 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9984,Adjusted R-squared:  0.9981
F-statistic:  3402 on 2 and 11 DF,  p-value: 4.4e-16


   (Intercept) poly(week, degree = 2)1 poly(week, degree = 2)2
1            1             -0.43094580              0.48181206
2            1             -0.36464645              0.25943726
3            1             -0.29834709              0.07412493
```

```
4           1             -0.23204774             -0.07412493
5           1             -0.16574839             -0.18531233
6           1             -0.09944903             -0.25943726
: : :   :

                        (Intercept) poly(week, degree = 2)1 poly(week, degree = 2)2
(Intercept)             1.400000e+01           -1.665335e-16            2.775558e-16
poly(week, degree = 2)1 -1.665335e-16           1.000000e+00           -2.775558e-17
poly(week, degree = 2)2  2.775558e-16          -2.775558e-17            1.000000e+00
```

Questions I.5: Quel produit scalaire est utilisé ici pour la notion d'orthogonalité? Quelle matrice est donnée par la commande `model.matrix`*? Retrouver mathématiquement la valeur* -0.43094580*. Que peut-on déduire de la deuxième matrice quant aux coefficients estimés? Quel est l'intérêt de travailler avec ces polynômes orthonormaux?* **(4pts)**