

Licence M.I.A.S.H.S. deuxième année 2016 – 2017

Méthodes Numériques S4

Contrôle continu n°1, mars 2017

*Examen de 1h30. Tout document ou calculatrice est interdit.***1. (Sur 8 points)**

(a) Soit le programme:

```

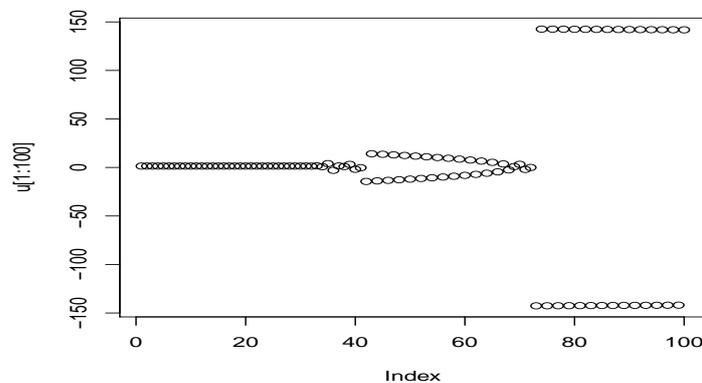
u=sqrt(2)
for (n in c(1:100))
{u[n+1]=4/u[n]-u[n]}
u[2]

```

Décrire ce qui a été fait dans ce programme (dire notamment ce qu'est u) (**1pt**). Le résultat du programme est [1] 1.414214. Expliquez pourquoi (**1pt**).

(b) Etudier théoriquement la suite définie par le programme. A-t-elle une limite et quelle est-elle (**1pt**)?

(c) On tape ensuite `plot(u)`, voir la figure ci-dessous. Que s'est-il passé (**1pt**)?



(d) On pose $u[n] = \sqrt{2} + \varepsilon$ avec $\varepsilon \simeq 0$. Montrer alors que $u[n+1] \simeq \sqrt{2} - 3\varepsilon$ (**3pts**). En déduire une explication du comportement de la suite (**1pt**).

2. (13 points) On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{C}$, on a: $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

(a) En déduire le développement en série entière de $\cos(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$ (**1pt**).

(b) Que vaut approximativement en degrés 1 radian (à un degré près) (**1pt**)? Donner un programme permettant de déterminer ce que vaut r radians (avec $r \geq 0$) en degrés à la minute de degré près (**3pts**).

(c) On a tapé les commandes suivantes:

```

S=1; N=15;
k=c(1:N); u=(-1)^k/factorial(2*k)
for (n in c(2:N)) S[n]=S[n-1]+u[n-1]
abs(cos(1)-S[1:N])

```

Décrire ce qui a été fait (en termes mathématiques!) en donnant notamment la formule mathématique de $S[N]$ (**1pt**). Montrer que l'erreur commise en approchant $\cos(1)$ par $S[N]$ est majorée par $\frac{1}{(2N)!}$ (**2pts**).

(d) Le résultat obtenu par le programme est:

```

[1] 4.596977e-01 4.030231e-02 1.364361e-03 2.452809e-05 2.734969e-07
[6] 2.076253e-09 1.142297e-11 4.773959e-14 0.000000e+00 1.110223e-16
[11] 1.110223e-16 1.110223e-16 1.110223e-16 1.110223e-16 1.110223e-16

```

Expliquer ce résultat (**0.5pts**). Combien a-t-il fallu calculer de termes pour avoir la meilleure approximation possible (**0.5pts**)?

(e) Démontrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$ (**1pt**). On écrit alors le programme:

```

S=1; N=10;
k=c(1:N); u=(-1)^k/2^(2*k)/factorial(2*k)
for (n in c(2:N)) S[n]=S[n-1]+u[n-1]
abs(cos(1)-(2*S[1:N]^2-1))

```

et on obtient:

```

[1] 4.596977e-01 9.052306e-03 7.584083e-05 3.391421e-07 9.428935e-10
[6] 1.786793e-12 2.442491e-15 0.000000e+00 0.000000e+00 0.000000e+00

```

Expliquer ce qui a été fait (**1pt**). Expliquer mathématiquement pourquoi la démarche proposée dans le programme a du sens (**2pts**). A-t-on gagné en terme de nombres de calculs quant à la qualité d'approximation de $\cos(1)$ (**1pt**)?