Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.I.A.S.H.S. deuxième année 2016 − 2017

Méthodes Numériques S4

Contrôle continu n°1, mars 2017

Examen de 1h30. Tout document ou calculatrice est interdit.

1. **(Sur 8 points)**

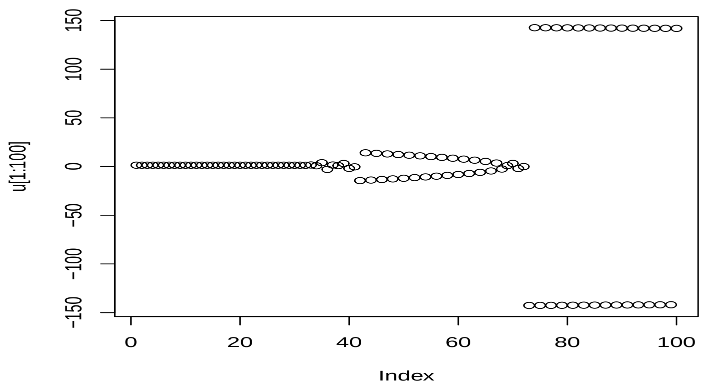
   (a) Soit le programme:

```
u=sqrt(2)
for (n in c(1:100))
{u[n+1]=4/u[n]-u[n]}
u[2]
```

   Décrire ce qui a été fait dans ce programme (dire notamment ce qu'est `u`) **(1pt)**. Le résultat du programme est `[1] 1.414214`. Expliquez pourquoi **(1pt)**.

   (b) Etudier théoriquement la suite définie par le programme. A-t-elle une limite et quelle est-elle **(1pt)**?

   (c) On tape ensuite `plot(u)`, voir la figure ci-dessous. Que s'est-il passé **(1pt)**?



   (d) On pose $u[n] = \sqrt{2} + \varepsilon$ avec $\varepsilon \simeq 0$. Montrer alors que $u[n+1] \simeq \sqrt{2} - 3\varepsilon$ **(3pts)**. En déduire une explication du comportement de la suite **(1pt)**.

Proof. (a) Le programme génère un vecteur **u** de taille 101 tel que $u[1] = \sqrt{2}$ et $u[n+1] = 4/u[n] - u[n]$. On affiche ensuite $u[2]$.
On a donc obtenu $u[2] \simeq 1.414214$ qui est très proche de $\sqrt{2}$. En effet, puisque $u[2] = 4/u[1] - u[1]$ et $u[1] = \sqrt{2}$ alors théoriquement $u[2] = 4/\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$.

(b) On a $u[2] = \sqrt{2}$ et par itération $u[n] = \sqrt{2}$ pour tout n: la suite est constante. Elle a donc pour limite et valeur unique $\sqrt{2}$.

(c) On s'aperçoit que si $u[n]$ reste proche de $\sqrt{2}$ pour n petit (≤ 30) ensuite elle s'écarte petit à petit de $\sqrt{2}$ pour en être très différente. On peut supecter que l'approximation faite à 10^{-16} près de $u[1] = \sqrt{2}$ a fini par entraîner des erreurs de plus en plus importantes sur les termes suivants.

(d) On utilise un développement limité de Taylor-Young d'ordre 1 de la fonction $f(x) = 4/x - x$ en $\sqrt{2}$. Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ et on a ainsi $f(x) = f(\sqrt{2}) + (x - \sqrt{2})f'(\sqrt{2}) + o(|x - \sqrt{2}|)$. Comme $f'(x) = -4/x^2 - 1$, on a ainsi $f(x) = \sqrt{2} - 3(x - \sqrt{2}) + o(|x - \sqrt{2}|)$ et en remplaçant x par $u_n = \sqrt{2} + \varepsilon$ on a ainsi: $u_{n+1} = f(u_n) \simeq \sqrt{2} - 3\varepsilon$. Si on itère ce développement limité, on a ensuite $u_{n+2} = \sqrt{2} + 9\varepsilon$, et ainsi par itération, $u_{n+k} = \sqrt{2} + (-3)^k\varepsilon$, et quand k devient grand l'erreur devient de plus en plus importante.

□

2. **(13 points)** On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{C}$, on a: $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

(a) En déduire le développement en série entière de $\cos(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$ **(1pt)**.

(b) Que vaut approximativement en degrés 1 radian (à un degré près) **(1pt)**? Donner un programme permettant de déterminer ce que vaut r radians (avec $r \geq 0$) en degrés à la minute de degré près **(3pts)**.

(c) On a tapé les commandes suivantes:

```
S=1; N=15;
k=c(1:N); u=(-1)^k/factorial(2*k)
for (n in c(2:N)) S[n]=S[n-1]+u[n-1]
abs(cos(1)-S[1:N])
```

Décrire ce qui a été fait (en termes mathématiques!) en donnant notamment la formule mathématique de $S[N]$ **(1pt)**. Montrer que l'erreur commise en approchant $\cos(1)$ par $S[N]$ est majorée par $\frac{1}{(2N)!}$ **(2pts)**.

(d) Le résultat obtenu par le programme est:

```
 [1] 4.596977e-01 4.030231e-02 1.364361e-03 2.452809e-05 2.734969e-07
 [6] 2.076253e-09 1.142297e-11 4.773959e-14 0.000000e+00 1.110223e-16
[11] 1.110223e-16 1.110223e-16 1.110223e-16 1.110223e-16 1.110223e-16
```

Expliquer ce résultat **(0.5pts)**. Combien a-t-il fallu calculer de termes pour avoir la meilleure approximation possible **(0.5pts)**?

(e) Démontrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$ **(1pt)**. On écrit alors le programme:

```
S=1; N=10;
k=c(1:N); u=(-1)^k/2^(2*k)/factorial(2*k)
for (n in c(2:N)) S[n]=S[n-1]+u[n-1]
abs(cos(1)-(2*S[1:N]^2-1))
```

et on obtient:

```
[1] 4.596977e-01 9.052306e-03 7.584083e-05 3.391421e-07 9.428935e-10
[6] 1.786793e-12 2.442491e-15 0.000000e+00 0.000000e+00 0.000000e+00
```

Expliquer ce qui a été fait **(1pt)**. Expliquer mathématiquement pourquoi la démarche proposée dans le programme a du sens **(2pts)**. A-t-on gagné en terme de nombres de calculs quant à la qualité d'approximation de $\cos(1)$ **(1pt)**?

Proof. (a) On sait que $\cos(x) = \mathcal{R}(e^{ix})$ donc on obtient avec $i^2 = -1$ que $\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$.

(b) On sait que 180^o équivaut à π radians soit environ 3.14 radians. Donc 1 radian équivaut environ à $180/\pi \simeq 180/3.14 \simeq 57$ degrés.
Un programme permettant ce calcul pourrait être:

```
r=1
deg=floor(r*180/pi)
rest=(r*180/pi-floor(r*180/pi))
min=rest*60
c(floor(deg),floor(min))
```

(c) Le programme calcule $S[k] = \sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j \frac{1}{(2j)!}$ pour $k = 1, \cdots, N$ avec $N = 15$, puis calcule la différence $|\cos(1) - S[k]|$.
On a ainsi $S[k] = \sum_{j=0}^{N-1}(-1)^j \frac{1}{(2j)!} = \sum_{j=0}^{14}(-1)^j \frac{1}{(2j)!}$.
D'après le critère de convergence des séries alternées, $|S - S_n| \leq u_{n+1}$ pour $S_n = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j u_j$ dès que (u_n) est une suite de réels positifs décroissant vers 0. C'est le cas ici avec $u_n = 1/(2n)!$ et on a donc $|\cos(1) - S[N]| \leq u_N$ (décalage d'indice de 1) soit $|\cos(1) - S[N]| \leq 1/(2N)!$.

(d) Le programme mesure la vitesse à laquelle la série S se rapproche de $\cos(1)$. On voit ainsi que pour $N \geq 9$, $\cos(1)$ a été approché avec une erreur d'approximation $\leq 10^{-16}$, limite de précision en R.

(e) On sait que $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$, d'où $\cos(2x) = \cos(x+x) = \sin^2(x) - \sin^2(x)$. Comme $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, on en déduit le résultat.
On écrit que $\cos(1) = 2\cos^2(1/2) - 1$. On peut utiliser la formule générale du développement en série entière de $\cos(1)$ pour écrire que $\cos(1/2) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{4^k(2k)!}$. L'avantage est que l'on améliore la vitesse de convergence vers $\cos(1/2)$ puisque $\left|\cos(1/2) - \sum_{k=0}^{N-1}(-1)^k \frac{1}{4^k(2k)!}\right| \leq \frac{1}{4^N(2N)!}$, vitesse bien plus rapide que précédemment.
On s'aperçoit désormais que 8 termes ont été suffisants pour approcher $\cos(1)$. D'un point de vue calculatoire, on a dû calculer un carré, effectuer une multiplication et une addition (par -1) en plus du calcul de ces 8 termes, pour pouvoir passer de $\cos(1/2)$ à $\cos(1)$. On n'a donc pas vraiment gagné en vitesse de calcul...

$\square$