Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.I.A.S.H.S. deuxième année 2020 – 2021

Méthodes Numériques S4

Contrôle continu n°1, mars 2021

Examen de 1h20. Tout document ou calculatrice est interdit.

1. **(Sur 7 points)** Le but de cet exercice est d'avoir l'intuition de la limite en $+\infty$ de $f(x) = \cos\big(\ln\big(\ln(x)\big)\big)$ grâce au logiciel `R`.

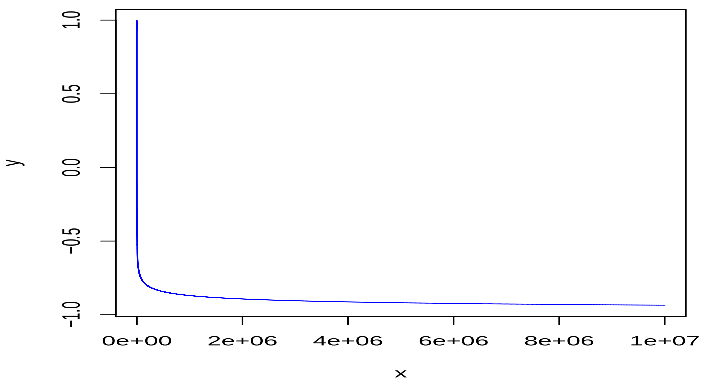
   (a) Soit le programme:

   ```
   n=1e+7
   x=c(1:n)
   y=cos(log(log(x)))
   plot(x,y,'l',col='blue')
   ```

   Décrire ce qui a été fait dans ce programme (formaliser notamment ce que sont `x` et `y`) **(1pt)**. On obtient d'abord un message:

   ```
   Warning message:
   In cos(log(log(x))) : production de NaN
   ```

   Expliquer ce message **(1pt)**. On obtient également la figure suivante:

   Que serait-on tenté de déduire de cette figure **(0.5pts)**?

   (b) On tape ensuite:

   ```
   k=c(1:6)
   u=exp(exp(pi*k/3))
   y2=cos(log(log(u)))
   u; y2
   ```

   On alors obtenu le résultat suivant:

   ```
   [1]  1.728180e+01  3.362794e+03  1.121696e+10  4.351770e+28  4.076489e+81 3.639746e+232
   [1]  0.5 -0.5 -1.0 -0.5  0.5  1.0
   ```

Qu'a-t-on fait ici **(0.5pts)**? Théoriquement, qu'aurait-on obtenu pour `y2` si on avait remplacé la première commande par `k=c(7:8)` **(1pt)**? Et avec `R` pour `u` **(0.5pts)**?

(c) Traiter désormais mathématiquement la question de la limite en $+\infty$ de f **(2.5pts)**.

2. **(16 points) –Algorithme du gradient–** On considère $a < b$ et une fonction f telle que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$, $m_2 \leq f''(x) \leq M_2$ pour tout $x \in [a, b]$ avec $0 < m_2$ et $f'(x_0) = 0$ où $x_0 \in]a, b[$.

(a) Démontrer que $f'(x) < 0$ pour $x \in [a, x_0[$ et $f'(x_0) > 0$ pour $x \in]x_0, b]$ **(1pt)**. Que peut-on en déduire pour $f(x_0)$? **(0.5pts)**.

(b) Démontrer que pour $x \in [a, x_0[$, $m_2\,(x_0 - x) \leq -f'(x) \leq M_2\,(x_0 - x)$ **(2pts)**.

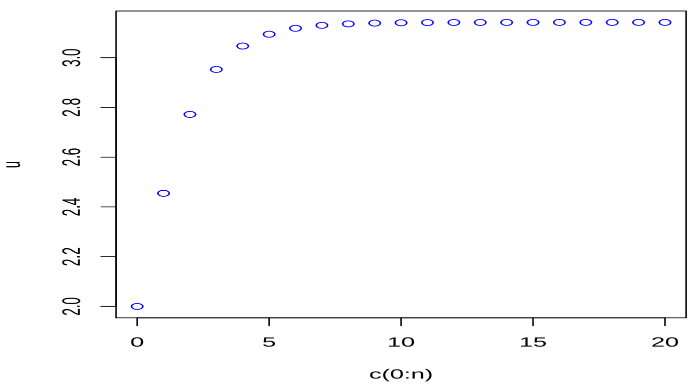
(c) Soit α un réel strictement positif tel que $\alpha\, M_2 < 1$ et soit la suite $u_{n+1} = u_n - \alpha\, f'(u_n)$ pour $n \geq 0$ et $u_0 \in [a, x_0[$. Montrer que $u_n \leq x_0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ **(2.5pts)** puis que (u_n) est une suite croissante **(1.5pts)**. Qu'en déduire **(0.5pts)**?

(d) Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|u_{n+1} - x_0| \leq (1 - \alpha\, m_2)\,|u_n - x_0|$ **(2pts)**. En déduire que $|u_n - x_0| \leq (1 - \alpha\, m_2)^n\,|u_0 - x_0|$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ **(1pt)**. Si on désire approcher x_0 avec u_N à 2.10^{-16} près, quelle condition N doit-il satisfaire **(1pt)**?

(e) Soit les commandes:

```
u=2; n=20
for (k in c(1:n))
u[k+1]=u[k]+0.5*sin(u[k])
plot(c(0:n),u,col='blue')
```

On obtient ainsi la figure suivante:



Expliquer ce qui a été fait et expliquer rigoureusement la convergence visible sur le graphe (vers quelle limite et pourquoi?) **(2.5pts)**.

(f) Enfin, on propose une autre version du programme précédent:

```
u=2; k=1; d=1;
while (d[k]>2e-16)
  {u[k+1]=u[k]+0.5*sin(u[k])
  d[k+1]=abs(u[k+1]-u[k])
  k=k+1}
k; u[k]
```

Et on a obtenu:

```
> k; u[k]
[1] 54
[1] 3.141593
```

Qu'a-t-on fait dans ce programme **(1pts)**? Que représente `k` **(0.5pts)**?