Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.I.A.S.H.S. deuxième année 2020 − 2021

Méthodes Numériques S4

Contrôle continu n°1, mars 2021

Examen de 1h20. Tout document ou calculatrice est interdit.

1. **(Sur 7 points)** Le but de cet exercice est d'avoir l'intuition de la limite en $+\infty$ de $f(x) = \cos\left(\ln\left(\ln(x)\right)\right)$ grâce au logiciel `R`.

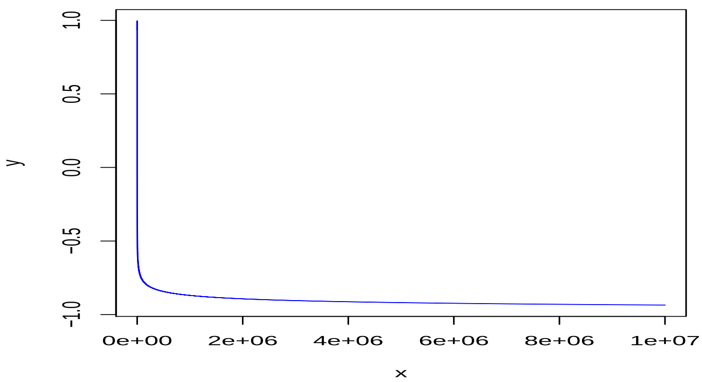
   (a) Soit le programme:

   ```
   n=1e+7
   x=c(1:n)
   y=cos(log(log(x)))
   plot(x,y,'l',col='blue')
   ```

   Décrire ce qui a été fait dans ce programme (formaliser notamment ce que sont `x` et `y`) **(1pt)**. On obtient d'abord un message:

   ```
   Warning message:
   In cos(log(log(x))) : production de NaN
   ```

   Expliquer ce message **(1pt)**. On obtient également la figure suivante:

   Que serait-on tenté de déduire de cette figure **(0.5pts)**?

   (b) On tape ensuite:

   ```
   k=c(1:6)
   u=exp(exp(pi*k/3))
   y2=cos(log(log(u)))
   u; y2
   ```

   On alors obtenu le résultat suivant:

   ```
   [1]  1.728180e+01  3.362794e+03  1.121696e+10  4.351770e+28  4.076489e+81 3.639746e+232
   [1]  0.5 -0.5 -1.0 -0.5  0.5  1.0
   ```

Qu'a-t-on fait ici **(0.5pts)**? Théoriquement, qu'aurait-on obtenu pour `y2` si on avait remplacé la première commande par `k=c(7:8)` **(1pt)**? Et avec `R` pour `u` **(0.5pts)**?

(c) Traiter désormais mathématiquement la question de la limite en $+\infty$ de f **(2.5pts)**.

Proof. (a) On fixe $n = 10^7$ et on définit les vecteurs $x = (1, 2, 3, \ldots, 10^7)$ et $y = (y_i)_{1 \le i \le 10^7}$ tel que $y_i = \cos(\ln(\ln(i))) = f(i)$. Enfin on trace le nuage de points $(i, y_i)_i$ en bleu et en reliant les points entre eux.
Pour $i = 1$, $\ln(i) = 0$, donc $\ln(\ln(i)) = \ln(0)$ n'existe pas, ce qui génère le `NaN` par le logiciel.
La figure semble montrer que les y_i tendent vers un nombre proche de -1, et ainsi que la limite de f en $+\infty$ serait un tel nombre.

(b) Cette fois-ci, on considère le vecteur $u = (u_1, \ldots, u_6)$ avec $u_k = \exp\big(\exp(\pi\, k/3)\big)$ pour $k = 1, \ldots, 6$. Ensuite, on calcule les valeurs $y2_k = \cos(\ln(\ln(u_k))) = f(u_k)$ pour $k = 1, \ldots, 6$, et on affiche les valeurs de `u` et `y2`.
Théoriquement, $\cos(\ln(\ln(u_k))) = \cos\Big(\ln\Big(\ln\Big(\exp\big(\exp(\pi\, k/3)\big)\Big)\Big)\Big) = \cos\big(\pi\, k/3\big)$. D'où pour $k = 7$, $y2_k = \cos(7\pi/3) = \cos(\pi/3) = 0.5$ et pour $k = 8$, $y2_k = \cos(8\pi/3) = \cos(2\pi/3) = -0.5$.
Avec `R`, u_7 et u_8 dépassent les limites de taille pour le logiciel soit $2^{1024} \simeq 1.7\, 10^{308}$.

(c) Si f tend vers une limite ℓ en $+\infty$, alors pour tout suite $(u_n)_n$ tendant vers $+\infty$, alors la suite $(f(u_n))_n$ tend vers ℓ. Or si l'on choisit $u_n = \exp\big(\exp\big(\pi\, n\big)\big)$, on a bien $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, mais $f(u_n) = \cos(\pi\, n) = (-1)^n$ qui n'admet pas de limite. Donc f n'admet pas de limite en $+\infty$. $\square$

2. **(16 points) –Algorithme du gradient–** On considère $a < b$ et une fonction f telle que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$, $m_2 \le f''(x) \le M_2$ pour tout $x \in [a, b]$ avec $0 < m_2$ et $f'(x_0) = 0$ où $x_0 \in]a, b[$.

(a) Démontrer que $f'(x) < 0$ pour $x \in [a, x_0[$ et $f'(x_0) > 0$ pour $x \in]x_0, b]$ **(1pt)**. Que peut-on en déduire pour $f(x_0)$? **(0.5pts)**.

(b) Démontrer que pour $x \in [a, x_0[$, $m_2\,(x_0 - x) \le -f'(x) \le M_2\,(x_0 - x)$ **(2pts)**.

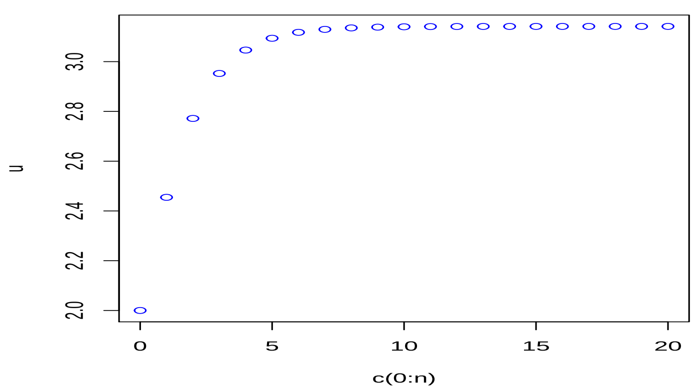
(c) Soit α un réel strictement positif tel que $\alpha\, M_2 < 1$ et soit la suite $u_{n+1} = u_n - \alpha\, f'(u_n)$ pour $n \ge 0$ et $u_0 \in [a, x_0[$. Montrer que $u_n \le x_0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ **(2.5pts)** puis que (u_n) est une suite croissante **(1.5pts)**. Qu'en déduire **(0.5pts)**?

(d) Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|u_{n+1} - x_0| \le (1 - \alpha\, m_2)\,|u_n - x_0|$ **(2pts)**. En déduire que $|u_n - x_0| \le (1 - \alpha\, m_2)^n\,|u_0 - x_0|$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ **(1pt)**. Si on désire approcher x_0 avec u_N à 2.10^{-16} près, quelle condition N doit-il satisfaire **(1pt)**?

(e) Soit les commandes:

```
u=2; n=20
for (k in c(1:n))
u[k+1]=u[k]+0.5*sin(u[k])
plot(c(0:n),u,col='blue')
```

On obtient ainsi la figure suivante:



Expliquer ce qui a été fait et expliquer rigoureusement la convergence visible sur le graphe (vers quelle limite et pourquoi?) **(2.5pts)**.

(f) Enfin, on propose une autre version du programme précédent:

```
u=2; k=1; d=1;
while (d[k]>2e-16)
  {u[k+1]=u[k]+0.5*sin(u[k])
  d[k+1]=abs(u[k+1]-u[k])
  k=k+1}
k; u[k]
```

Et on a obtenu:

```
> k; u[k]
[1] 54
[1] 3.141593
```

Qu'a-t-on fait dans ce programme **(1pts)**? Que représente `k` **(0.5pts)**?

Proof. (a) La fonction $g = f'$ est dérivable sur $[a, b]$ et sa dérivée en $x \in [a, b]$ est $f''(x) > 0$, donc la fonction g est strictement croissante sur $[a, b]$. Or $g(x_0) = 0$. D'où $g(x) = f'(x) < 0$ pour $x < x_0$ et $g(x) = f'(x) > 0$ pour $x > x_0$.
On déduit que f est strictement décroissante sur $[a, x_0[$ et strictement croissante sur $]x_0, b]$: f atteint son unique minimum local et global sur $[a, b]$ en x_0.

(b) Soit $x \in [a, x_0[$. En utilisant un développement limité d'ordre 1 de Taylor-Lagrange de $f'(x)$ en x_0, on sait qu'il existe $c \in [x, x_0]$ tel que $f'(x) = f'(x_0) + (x - x_0) f''(c)$. Or $f'(x_0) = 0$, d'où $-f'(x) = (x_0 - x) f''(c)$, avec $(x_0 - x) > 0$ et $f''(c) > 0$. Comme $m_2 \leq f''(c) \leq M_2$, on en déduit que $m_2 (x_0 - x) \leq -f'(x) \leq M_2 (x_0 - x)$.

(c) Montrons par récurrence que $u_n \leq x_0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. La propriété est vraie au rang 0 puisque l'on a choisi $u_0 \in [a, x_0]$. Supposons que la propriété est vraie au rang n. Alors $u_{n+1} = u_n - \alpha f'(u_n)$, soit $x_0 - u_{n+1} = x_0 - u_n + \alpha\, f'(u_n)$. Or d'après ce qui précède, comme $u_n \in [a, x_0]$, alors $\alpha f'(u_n) \geq -\alpha M_2(x_0 - u_n)$, d'où

$$x_0 - u_{n+1} \geq (x_0 - u_n) - \alpha M_2(x_0 - u_n) \geq (1 - \alpha M_2)(x_0 - u_n).$$

Comme $u_n \leq x_0$ et $\alpha M_2 < 1$ soit $1 - \alpha M_2 > 0$, on en déduit que $x_0 - u_{n+1} \geq 0$, d'où $u_{n+1} \leq x_0$: la propriété est vraie au rang $n + 1$. Elle donc donc vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$.
On a pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} - u_n = -\alpha f'(u_n)$. Mais comme $u_n \leq x_0$ pour tout n, alors $f'(u_n) < 0$ et ainsi $-\alpha f'(u_n) > 0$. La suite est donc croissante puisque $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
La suite (u_n) est croissante et majorée par x_0, elle est donc convergente.

(d) On a $x_0 - u_{n+1} = (x_0 - u_n) + \alpha f'(u_n)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Grâce à l'inégalité démontrée en (b), $\alpha f'(u_n) \leq -\alpha m_2(x_0 - u_n)$. D'où le résultat puisque $|u_{n+1} - x_0| = x_0 - u_{n+1}$, $|u_n - x_0| = x_0 - u_n$ et $1 - \alpha m_2 > 0$ puisque $1 - \alpha M_2 > 0$.
La propriété précédente étant vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a également $|u_n - x_0| \leq (1 - \alpha m_2) |u_{n-1} - x_0|$, d'où $|u_{n+1} - x_0| \leq (1 - \alpha m_2)^2 |u_{n-1} - x_0|$. Par itération du procédé, on obtient le résultat.
On voudrait $|u_N - x_0| \leq 2\,10^{-16}$. Pour cela il suffit d'avoir $(1 - \alpha m_2)^N |u_0 - x_0| \leq 2\,10^{-16}$, d'où $N \ln(1 - \alpha m_2) \leq \ln(2\,10^{-16}) - \ln(|u_0 - x_0|)$. Comme $\ln(1 - \alpha m_2) < 0$, il suffira donc que

$$N \geq \frac{\ln(2\,10^{-16}) - \ln(|u_0 - x_0|)}{\ln(1 - \alpha m_2)}.$$

(e) On applique l'algorithme précédent à la fonction $f(x) = \cos(x)$ pour $x \in [2, \pi]$. Il est clair que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[2, \pi]$ et atteint son minimum en π car alors $f''(x) = -\cos(x) > 0$ (on a même $m_2 = -\cos(2) \leq f''(x) \leq 1 = M_2$ pour $x \in [2, \pi]$). On utilise $\alpha = 1/2$, d'où $\alpha M_2 = 1/2 < 1$. Ceci montre théoriquement que (u_n) converge vers π, ce que l'on constate sur la figure.

(f) Ce programme rajoute un critère d'arrêt pour la boucle, dès que l'écart entre u_{n+1} et u_n est plus petit que $2\,10^{-16}$, soit le minimum possible avec `R`. En 54 itération, le minimum de la fonction, en π, est donc atteint.

□