Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.I.A.S.H.S. deuxième année 2018 – 2019

Méthodes Numériques S4

Examen terminal, mai 2019

Examen de 2h00. Tout document ou calculatrice est interdit.

1. **(Sur 14 points)** On considère pour $n \in \mathbf{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(t)\,dt$.

   (a) Montrer que I_n existe pour tout $n \in \mathbf{N}$ **(0.5pts)**. Déterminer I_0 **(0.5pts)**.

   (b) Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite décroissante minorée **(1.5pts)**. Que peut-on en déduire **(0.5pts)**?

   (c) A l'aide d'intégration par parties, montrer que $I_{n+1} = \dfrac{2n+1}{2n+2}\, I_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ **(2pts)**.

   (d) En déduire que $I_n = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\,\dfrac{\pi}{2}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ **(2pts)**.

   (e) On désire calculer directement I_{10}, I_{50} et I_{100}. On écrit ainsi le programme en `R`:

   ```
   n=c(10,50,100)
   I=factorial(2*n)/((factorial(n))^2*2^(2*n))*pi/2
   ```

   Le résultat obtenu est `[1] 0.2767697 0.1250185 NaN`. Comment expliquer le dernier résultat **(1pt)**? Comment aurait-on pu éviter cela **(0.5pts)**? Ecrire un autre programme permettant de calculer I_{100} **(1.5pts)**.

   (f) On va utiliser un autre programme pour approcher I_{50} et I_{100}. Soit la suite de commandes :

   ```
   m=1000
   k=c(1:m)
   I50=sum(cos((k-1)*pi/(2*m))^100+cos(k*pi/(2*m))^100)/(2*m)*pi/2
   I100=sum(cos((k-1)*pi/(2*m))^200+cos(k*pi/(2*m))^200)/(2*m)*pi/2
   I50; I100
   ```

   On a obtenu `[1] 0.1250185 [1] 0.08851198`. Expliquer ce qui a été fait avec ce programme, en écrivant notamment la formule théorique **(1pt)**. Comment aurait-on pu présager à l'avance de la précision des calculs **(1.5pt)**? Quelle méthode aurait-on pu utiliser pour approcher I_{100} encore plus précisément **(0.5pts)**?

   (g) On va utiliser maintenant une autre méthode pour I_{50} et I_{100}. Soit le programme:

   ```
   m=1000
   X=runif(m,0,pi/2)
   IMC50=mean(cos(X)^100)*pi/2
   IMC100=mean(cos(X)^200)*pi/2
   IMC50; IMC100
   ```

   On obtient cette fois-ci les résultats `[1] 0.1121384 [1] 0.08072921`. Ecrire I_n comme une espérance et en déduire ce qui a été calculé en justifiant **(1.5pts)**. Donner un contrôle de l'erreur commise **(1pt)**. Pour approcher I_{100}, préfèrera-t-on 0.08851198 ou 0.08072921 **(0.5pts)**?

2. **(Sur 10 points)** On sait que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ et $\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$. Le but de cet exercice est de donner une valeur approchée de π.

   (a) Montrer que pour tout $x \in [0,2]$, $\left| \sin x - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right| \leq \frac{2^{2n+3}}{(2n+3)!}$ **(1pt)**.

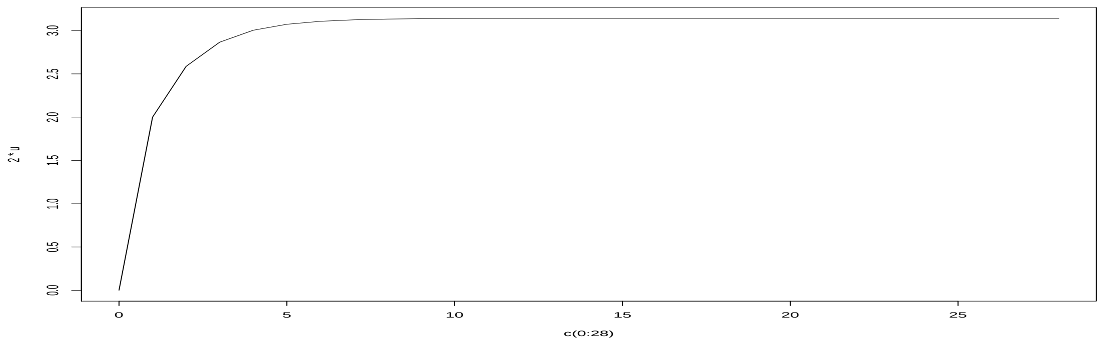
   (b) Montrer que $(2n+3)! \geq n^{n+2}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ **(1.5pts)**. En déduire que pour $n = 40$, $\left| \sin x - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right| \leq \left(\frac{4}{n}\right)^{n+2} \leq 10^{-42}$ **(1.5pt)**. De la même manière, pour $n = 40$, on montre (ne pas le faire!) que $\left| \cos x - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \right| \leq \left(\frac{4}{n}\right)^{n+1} \leq 10^{-41}$.

   (c) Démontrer que l'équation $\sin x = 1$ admet une unique solution sur $[0,2]$ **(1pt)**.

   (d) Soit la suite de commandes en R:

```
u=0; u[2]=1; k=1; n=c(0:40);
epsilon=10^(-15)
while (abs(u[k+1]-u[k])>epsilon)
{k=k+1
si=sum((-1)^n*u[k]^(2*n+1)/factorial(2*n+1))
co=sum((-1)^n*u[k]^(2*n)/factorial(2*n))
u[k+1]=u[k]-(si-1)/co}
plot(c(0:28),2*u,"l")
```

   Voici la courbe obtenue:



   Expliquer ce qui a été fait par ces commandes, notamment ce qu'est l'objet `si`, la formule de calcul de `u[k]`, le rôle de `epsilon` et pourquoi la commande `plot` prend en compte `2*u` **(2pts)**. Quel est grossièrement le coût en terme d'additions et multiplications de cette méthode d'approximation de π **(1pt)**? Suggérer également une méthode à partir de l'approximation d'intégrales ou de séries entières, et donner le code R relatif **(1.5pts)**. Est-ce plus intéressant **(0.5pts)**?