Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Première Année Master M.A.E.F. 2006 – 2007

Statistiques I

Contrôle continu n°1, novembre 2006

Examen de 2 h 00. Tout document ou calculatrice est interdit.

1. On considère une suite $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant une loi $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$, où $\sigma^2>0$ est un paramètre inconnu. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on définit :
$$X_n=\varepsilon_n-\alpha\varepsilon_{n-1},$$
où $\alpha\in\mathbb{R}$ est inconnu. On notera par la suite $\theta=(\sigma^2,\alpha)$.
   (a) Montrer que $\mathrm{var}(\varepsilon_i^2)=2\sigma^4$.
   (b) Pour tout $i\in\mathbb{N}^*$, déterminer $\mathbb{E}(X_i)$ et $\mathrm{var}(X_i)$. Montrer que $(X_i)_i$ est une suite de variables identiquement distribuées dont vous préciserez la loi.
   (c) Montrer que $\mathrm{cov}(X_i,X_j)=(1+\alpha^2)\sigma^2$ si $i=j$, $\mathrm{cov}(X_i,X_j)=-\alpha\sigma^2$ si $|i-j|=1$ et $\mathrm{cov}(X_i,X_j)=0$ sinon.
   (d) Pour n fixé, en déduire la loi du vecteur $(X_1,\dots,X_n)$, puis déterminer le modèle statistique paramétrique associé en précisant une mesure dominante.
   (e) Soit $\widehat{\sigma}_n^2=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^n X_i^2$. Montrer que $\widehat{\sigma}_n^2$ est un estimateur non biaisé de σ^2. Soit
$$Z_n^{(1)}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{[n/2]}X_{2k}^2\quad\text{et}\quad Z_n^{(2)}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{[(n+1)/2]}X_{2k-1}^2,$$
avec $[x]$ la partie entière de x. Montrer que les suites de variables $(Z_n^{(1)})_n$ et $(Z_n^{(2)})_n$ convergent presque sûrement (préciser leurs limites) et qu'elles vérifient un théorème de la limite centrale.
   (f) Montrer que si deux suites de variables convergent presque sûrement, la suite composée de leurs sommes converge presque sûrement. En déduire que $(\widehat{\sigma}_n^2)_n$ converge presque sûrement vers σ^2.
   (g) Soit $\widehat{\rho}_n=\dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}X_iX_{i+1}$. En utilisant le même type d'argument que précédemment, montrer que $(\widehat{\rho}_n)_n$ converge presque sûrement vers $-\alpha\sigma^2$. En déduire un estimateur de α convergeant presque sûrement.

2. Soit X une variable aléatoire dont la loi est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et telle que sa densité par rapport à cette mesure soit :
$$f_{\alpha,a}(x)=K\cdot\frac{1}{|x|^\alpha}\mathbb{I}_{-a\le x\le a},$$
avec $a\in\mathbb{R}$ et $\alpha\in\mathbb{R}$. Soit $(X_1,\dots,X_n)$ un échantillon de n v.a.i.i.d. de même loi que X.
   (a) Après avoir préciser l'ensemble des valeurs Θ pour $\theta=(a,\alpha)$, déterminer K en fonction de a et α.
   (b) Calculer $\mathbb{E}(X)$ après avoir vérifier que ce calcul peut être effectué pour $\theta\in\Theta$.
   (c) Quel est le modèle statistique associé à $(X_1,\dots,X_n)$.
   (d) Montrer que $\widehat{S}=(|X_1|,\dots,|X_n|)$ est une statistique exhaustive. Montrer que pour $n\ge 3$ cette statistique n'est pas minimale.
   (e) Déterminer une statistique $\widehat{T}=(\widehat{T}_1,\widehat{T}_2)$ à valeurs dans $[0,+\infty[^2$ qui soit exhaustive minimale pour tout $n\in\mathbb{N}$.