Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Première Année Master M.A.E.F. 2007 – 2008

Statistiques I

Contrôle continu n°2, janvier 2008

Examen de 1h30. Tout document ou calculatrice est interdit.

Soit $(a, b) \in]0, \infty[\times \mathbb{R}$, deux paramètres inconnus et soit $\mathbb{P}_{a,b}$ la mesure de probabilité admettant la densité $f_{a,b}$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ telle que

$$f_{a,b}(x) := \frac{1}{a}\Big(\frac{x-b}{a}\Big)\exp\Big(-\frac{1}{2}\Big(\frac{x-b}{a}\Big)^2\Big)\,\mathbb{I}_{\{x>b\}}, \quad \text{pour} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dans la suite on considère un échantillon $(X_1, \cdots, X_n)$ de v.a.i.i.d. suivant la loi $\mathbb{P}_{a,b}$.

1. Dans cette partie, on suppose que l'on sait que $b = 0$ (la loi $\mathbb{P}_{a,0}$ est appelée loi de Rayleigh). Déterminer alors le modèle statistique et une mesure dominante. Montrer que le modèle appartient alors à la famille exponentielle. Déterminer une statistique exhaustive et complète pour ce modèle. Montrer que a^2 est la seule fonction de a (à une transformation affine près) pouvant être estimer sans biais et efficacement (préciser alors l'estimateur). En déduire un estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{a^2_n}$ de a^2 et montrer qu'il vérifie le théorème de la limite centrale (TLC):
$$\sqrt{n}\,(\widehat{a^2_n} - a^2) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, a^4).$$
Déterminer l'estimateur $\widehat{a_n}$ du maximum de vraisemblance de a, montrer qu'il vérifie également un TLC et en déduire un intervalle asymptotique de confiance à 95% de a.

2. Désormais et ceci jusqu'à la fin du problème $b \in \mathbb{R}$ est inconnu et on note $\theta := (a, b)$.
   (a) Déterminer alors le modèle statistique et une mesure dominante. Expliquer pourquoi le modèle n'appartient pas à la famille exponentielle et n'est pas régulier.
   (b) Pour Z une variable aléatoire strictement positive Z, montrer que $(\mathbb{E}(Z))^{-1} \leq \mathbb{E}(Z^{-1})$, puis que $\mathbb{E}(Z) \leq \mathbb{E}(Z^{-1})\cdot\mathbb{E}(Z^2)$ (on supposera que ces espérances existent). En déduire que si $(z_i)_{1\leq i\leq n}$ est une famille de réels strictement positifs, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n z_i \leq \Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{1}{z_i}\Big)\cdot\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n z_i^2\Big)$. Montrer en revanche que si $n \geq 2$ et $z_1 < z_i$ pour tout $i = 2, \ldots, n$, la fonction ϕ définie pour tout $z_1 \in]0, \infty[$ par $\phi(z_1) := \frac{2}{n}\sum_{i=1}^n z_i - \Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{1}{z_i}\Big)\cdot\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n z_i^2\Big)$ est toujours négative dans un voisinage de 0.
   (c) Déduire de la question précédente que pour $n \geq 2$ et les X_i non tous égaux, montrer qu'un estimateur du maximum de vraisemblance de b est strictement inférieur à $\tilde{b_n} := \min_{1\leq i\leq n}(X_i)$.
   (d) On définit désormais l'estimateur $\tilde{\theta_n}$ de θ par:
   $$\tilde{\theta_n} := \Big(\Big(\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^n (X_i - \min_{1\leq i\leq n}(X_i))^2\Big)^{1/2}, \min_{1\leq i\leq n}(X_i)\Big).$$
   Pour (a, b) fixé, montrer que la fonction de répartition F de $\tilde{b_n} := \min_{1\leq i\leq n}(X_i)$ est telle que $F(x) = 1 - \exp\Big(-\frac{n}{2}\Big(\frac{x-b}{a}\Big)^2\Big)$ pour $x > b$ et 0 sinon. En déduire que $\tilde{b_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} b$. Montrer que $\mathbb{E}(\tilde{b_n}) = b + a\sqrt{\frac{\pi}{2\,n}}$ et $\mathrm{var}(\tilde{b_n}) = a^2\,\frac{4-\pi}{2n}$. En déduire pour tout $0 \leq \alpha < 1/2$, $n^\alpha(\tilde{b_n} - b) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} 0$.