Corrections de quelques exercices de la feuille n^o 2:

Une application en analyse: les séries de Fourier

(4) **(*)** Soit f la fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ définie sur $]-\pi,0]$ par $f(x)=0$ et par $f(x)=x$ sur $]0,\pi]$. Développer f en série de Fourier. La fonction f coincide-t-elle avec la somme de sa série de Fourier ? Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$. Peut-on calculer d'autres sommes de séries numériques ?

Proof. f n'est ni paire, ni impaire, et elle est $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, mais non continue en π modulo 2π. On peut calculer les coefficients de Fourier:

$$\begin{aligned}
a_0(f) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x dx = \frac{1}{2\pi}(\pi^2)=\frac{\pi}{2};\\
a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\Big(\big[\frac{\sin(nx)}{n}x\big]_0^\pi - \frac{1}{n}\int_0^\pi \sin(nx)dx\Big)\\
&= \frac{1}{\pi n^2}\big[\cos(nx)\big]_0^\pi = \frac{1}{\pi n^2}((-1)^n-1) \text{ pour } n\in\mathbb{N}^*;\\
b_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}\Big(\big[-\frac{\cos(nx)}{n}x\big]_0^\pi + \frac{1}{n}\int_0^\pi \cos(nx)dx\Big)\\
&= \frac{1}{\pi n}((-1)^n\pi) = \frac{(-1)^n}{n} \text{ pour } n\in\mathbb{N}^*.
\end{aligned}$$

La série de Fourier de f est $S_f(x)=\dfrac{\pi}{4}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\big((-1)^n-1)\frac{\cos(nx)}{\pi n^2}+(-1)^n\frac{\sin(nx)}{n}\big)$. Si n est pair, $(-1)^n-1=0$, donc on peut ne considérer que les cas où n est impair et on trouve: $S_f(x)=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin(nx)}{n}$.
D'après le Théorème de Dirichlet, si $x\neq\pi\ [2\pi]$, alors $f(x)=S_f(x)$, et pour $x=\pi\ [2\pi]$, $\frac{f(\pi^+)+f(\pi^-)}{2}=\frac{\pi}{2}=S_f(\pi)$.
De ceci, on en déduit que pour $x=\pi/2$, comme $\cos((2n+1)\pi/2)=0$ et $\sin((2n+1)\pi/2)=(-1)^n$ et $\sin(2n\pi/2)=0$, alors $f(\dfrac{\pi}{2})=\dfrac{\pi}{2}=S_f(\dfrac{\pi}{2})=\dfrac{\pi}{4}+\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$, d'où $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}=\frac{\pi}{4}$.
Si on choisit $x=0$, alors $\sin(n0)=0$ et $f(0)=0=S_f(0)=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$, d'où $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$. □

(5) **(**)** On considère la fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ définie sur $[0,2\pi[$ par $f(x)=x\sin\dfrac{x}{2}$.
  (a) Calculer les coefficients de Fourier de f.
  (b) Quelle est la nature de la série de Fourier S_f de f ?
  (c) En utilisant $S_f(\pi)$, déterminer la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}$.

Proof. (a) Attention f n'est pas paire! On a
$a_n(f)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}x\sin(x/2)\cos(nx)dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}x\big(\sin((n+1/2)x)-\sin((n-1/2)x)\big)dx$. Par intégration par parties,

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}x\big(\sin((n+1/2)x)-\sin((n-1/2)x)\big)dx &= \Big[x\big(-\frac{\cos((n+1/2)x)}{n+1/2}+\frac{\cos((n-1/2)x)}{n-1/2}\big)\Big]_0^{2\pi}\\
&\quad+\int_0^{2\pi}\frac{\cos((n+1/2)x)}{n+1/2}-\frac{\cos((n-1/2)x)}{n-1/2}\big)dx\\
&= \frac{2\pi}{n+1/2}-\frac{2\pi}{n-1/2}+\Big[\frac{\sin((n+1/2)x)}{(n+1/2)^2}-\frac{\sin((n-1/2)x)}{(n-1/2)^2}\big)\Big]_0^{2\pi}\\
&= -\frac{2\pi}{n^2-1/4}\\
\Longrightarrow\qquad a_n(f) &= -\frac{1}{n^2-1/4}
\end{aligned}$$

De la même manière, $b_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\sin(x/2)\sin(nx)dx=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}x\big(\cos((n+1/2)x)-\cos((n-1/2)x)\big)dx$. Par intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}x\big(\cos((n+1/2)x)-\cos((n-1/2)x)\big)dx &= \Big[x\big(\frac{\sin((n+1/2)x)}{n+1/2}-\frac{\sin((n-1/2)x)}{n-1/2}\big)\Big]_0^{2\pi}\\ &\quad -\int_0^{2\pi}\frac{\sin((n+1/2)x)}{n+1/2}-\frac{\sin((n-1/2)x)}{n-1/2}\big)dx\\ &= 0+\Big[\frac{\cos((n+1/2)x)}{(n+1/2)^2}-\frac{\cos((n-1/2)x)}{(n-1/2)^2}\big)\Big]_0^{2\pi}\\ &= \frac{4n}{(n^2-1/4)^2}\\ \Longrightarrow \qquad b_n(f) &= -\frac{2n}{\pi(n^2-1/4)^2}\end{aligned}$$

(b) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ (car $f(0)=f(2\pi)$) et $\mathcal{C}^1$ sur $]0,2\pi[$ (mais la dérivée n'est pas continue en 0 car $f'(0^+)=0\neq f'(2\pi^-)=-\pi$). Donc d'après le Théorème de Dirichlet $S_f=f$.
(c) $S_f(\pi)=f(\pi)=\pi$. Par ailleurs, $S_f(\pi)=a_0(f)/2+\sum_{n=1}^\infty(-1)^n a_n(f)$ donc $S_f(\pi)=2-\sum_{n=1}^\infty\frac{(-1)^n}{n^2-1/4}$ donc $\sum_{n=1}^\infty\frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}=(S_f(\pi)-2)/4=\pi/4-1/2$.

□

(6) **(**)** Déterminer la série de Fourier de la fonction 2π-périodique impaire f définie par $f(x)=x(\pi-x)$ si $x\in[0,\pi]$. Quelles sommes de séries numériques peut-on en déduire?

Proof. On a $a_n(f)=0$ car f impaire. En revanche, $b_n(f)=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x(\pi-x)\sin(nx)dx$. Par intégration par parties,

$$\begin{aligned}b_n(f) &= \frac{2}{\pi}\Big(-\Big[\frac{\cos(nx)}{n}x(\pi-x)\Big]_0^\pi+\int_0^\pi(-2x+\pi)\frac{\cos(nx)}{n}dx\Big)\\ &= \frac{2}{\pi}\Big(0+\Big[\frac{\sin(nx)}{n^2}(-2x+\pi)\Big]_0^\pi+2\int_0^\pi\frac{\sin(nx)}{n^2}dx\Big)\\ &= -\frac{4}{\pi}\Big[\frac{\cos(nx)}{n^3}\Big]_0^\pi=\frac{4(1-(-1)^n)}{\pi n^3}.\end{aligned}$$

Comme f est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (la dérivée est continue en π car $f'(\pi^-)=-\pi$ et $f'(-\pi^+)=-\pi$). Donc d'après le Théorème de Dirichlet $S_f=f$, soit $x(\pi-x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^\infty\frac{(1-(-1)^n)}{n^3}\sin(nx)$. Pour $x=\pi/2$ (seul point vraiment intéressant) en distinguant n pair et n impair, on fini par obtenir que $\frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^\infty\frac{2(-1)^p}{(2p+1)^3}=\frac{\pi^2}{4}$ d'où $\sum_{p=0}^\infty\frac{(-1)^p}{(2p+1)^3}=\frac{\pi^3}{32}$. □

(7) **(***)** Montrer que si une série trigonométrique converge uniformément sur $[0,\pi]$, alors elle est identique à la série de Fourier de sa somme. Donner la série de Fourier d'un polynôme trigonométrique. Montrer que la série trigonométrique $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. En utilisant la formule de Parseval, montrer qu'elle est différente de la série de Fourier de sa somme.

Proof. On considère donc $g_n(x)=\sum_{k=0}^n\alpha_k\cos(kx)+\beta_k\sin(kx)$ et on suppose que (g_n) converge uniformément vers g sa limite. Alors, comme les fonctions $x\mapsto\alpha_k\cos(kx)+\beta_k\sin(kx)$ sont continues sur $\mathbb{R}$ on en déduit que g est continue. Par ailleurs, $g(x)=\sum_{k=0}^\infty\alpha_k\cos(kx)+\beta_k\sin(kx)$. Comme g est continue donc intégrable, on montre facilement que $a_n(g)=\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^\pi\big(\sum_{k=0}^\infty\alpha_k\cos(kx)+\beta_k\sin(kx)\big)\cos(nx)dx$ et comme la série converge uniformémement on peut intervertir la somme et l'intégrale donc $a_n(g)=\sum_{k=0}^\infty\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^\pi\big(\alpha_k\cos(kx)+\beta_k\sin(kx)\big)\cos(nx)dx=\alpha_n$ pour $n\geq 1$ et $a_0(g)=2\alpha_0$. La même chose pour $b_n(f)$. Donc $S_g=g$.
Si $g=g_n$ alors il est bien clair que $S_g=g_n$ aussi.
La série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ converge simplement. On élimine d'entrée le cas où $x=\pi\ [\pi]$ puisqu'alors la série est nulle. Pour le montrer on utilise la transformation d'Abel, en écrivant que $A_n=\sum_{k=1}^n\sin(kx)$ et $A_0=0$, puis $\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}=(A_n-A_{n-1})\frac{1}{\sqrt{n}}$ d'où $\sum_{n=1}^N\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^N A_n\frac{1}{\sqrt{n}}-\sum_{n=0}^{N-1}A_n\frac{1}{\sqrt{n+1}}=\sum_{n=1}^{N-1}A_n\big(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\big)+\frac{A_N}{\sqrt{N}}$. Mais $A_n=\mathcal{I}m\Big(\sum_{k=1}^n e^{ikx}\Big)=\mathcal{I}m\Big(e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}}\Big)=\sin((n+1)x/2)\frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}$ pour $x\neq\pi\ [\pi]$. Donc pour $x\neq\pi\ [\pi]$, $|A_n|\leq 1/\sin(x/2)$ et comme $\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\sim\frac{1}{2n\sqrt{n}}$ pour $n\to\infty$, on en déduit que $\sum_{n=1}^{N-1}A_n\big(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\big)$ converge absolument quand $N\to\infty$ d'après le théorème de comparaison (puisque $\sum n^{-3/2}$ converge) et $\frac{A_N}{\sqrt{N}}\to 0$ quand $N\to\infty$. Il y a donc bien convergence simple sur $\mathbb{R}$.
D'après ce qui précède, finalement on peut montrer avec la transformation d'Abel que la série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ converge uniformément sur tout intervalle fermé inclus dans $]0,2\pi[$. En conséquence, comme $x\mapsto\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ est continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit que la fonction $x\mapsto\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ est continue sur $]0,2\pi[$. De plus, en 0 cette fonction vaut 0. La question est donc la limite de cette fonction en 0^+. Si celle-ci existe, on peut appliquer le Théorème de Bessel et le développement

en série de Fourier de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ serait lui-même. Mais cette fonction ne converge pas dans ℓ^2 puisque $\sum(1/\sqrt{n})^2$ diverge. On en déduit que la limite de cette fonction en 0^+ n'existe pas, et donc la série de Fourier de f n'est pas f.

□

(8) **(***) Théorème de Bernstein**

(a) Soit f 2π-périodique, de classe $\mathcal{C}^1$. Calculer les coefficients de Fourier de f' en fonction de ceux de f.

(b) On suppose de plus que $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$. Montrer que

$$\int_0^{2\pi} [f(t)]^2 dt \leq \int_0^{2\pi} [f'(t)]^2 dt.$$

En quel cas a-t-on égalité ?

(c) Soit f 2π-périodique continue. Soient $a_n(f)$ et $b_n(f)$ ses coefficients de Fourier. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\big(a_n(f)\sin nx - b_n(f)\cos nx\big)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ et préciser sa somme en utilisant une intégrale de f.

Proof. (a) Par une intégration par parties, $a_n(f') = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}\pi f'(t)\cos(nt)dt = \frac{1}{\pi}\Big(\Big[f(t)\cos(nt)\Big]_{-\pi}^{\pi} + n\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)dt$, d'où $a_n(f') = n\, b_n(f)/n$ (pour $n = 0$, $a_n(f') = 0$). De même, $b_n(f') = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}\pi f'(t)\sin(nt)dt = \frac{1}{\pi}\Big(\Big[f(t)\sin(nt)\Big]_{-\pi}^{\pi} - n\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt$, d'où $b_n(f') = -n\, a_n(f)$.

(b) Si $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$ alors $a_0(f) = 0$. Mais comme f et f' sont continues ont peu utiliser le Théorème de Bessel, donc $\int_0^{2\pi}[f(t)]^2dt = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)^2 + b_n(f)^2 = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(a_n(f')^2 + b_n(f')^2) \leq \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n(f')^2 + b_n(f')^2) = \int_0^{2\pi}[f'(t)]^2dt$. Pour avoir égalité, il faudrait que $a_n(f) = b_n(f) = 0$ dès que $n \geq 2$, donc il faut que f soit un polynôme trigonométrique de degré 1.

(c) Soit F la primitive de f telle que $\int_0^{2\pi} F(t)dt = 0$. Si $F(x) = \int_0^x f(t)dt + a$, alors $a = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^x f(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(t-2\pi)f(t)dt$. Alors F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et d'après la question (a), $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\big(a_n(f)\sin nx - b_n(f)\cos nx\big)$. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{n}\big|a_n(f)\sin nx - b_n(f)\cos nx\big| \leq \frac{1}{n}(|a_n(f)| + |b_n(f)|) \leq 2(\frac{1}{n^2} + 2(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2)$ et comme f est continue $\sum|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2$ converge, tout comme $\sum\frac{1}{n^2}$. Donc on a bien convergence normale. □

(10) **(***)** En utilisant une solution particulière sous forme de série trigonométrique, résoudre l'équation différentielle $y^{(4)} - 5y^{(2)} + 4y = |\sin 2t|$.

Proof. On commence par résoudre l'équation homogène associée, qui a pour équation caractéristique $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$. 1 est une racine évidente, et $x^4 - 5x^2 + 4 = (x-1)(x^3 + x^2 - 4x - 4)$. Ensuite -1 est racine évidente de $x^3 + x^2 - 4x - 4$, d'où $x^4 - 5x^2 + 4 = (x-1)(x+1)(x^2-4) = (x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$. On en déduit que

$$\mathcal{H} = \{ae^x + be^{-x} + ce^{2x} + e^{-2x},\ (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4\}.$$

Si on suppose que $y(x) = \sum \alpha_n\cos(nx) + \beta_n\sin(nx)$ avec (α_n) et (β_n) telles que y soit de classe $\mathcal{C}^4$, alors $y^{(2)}(x) = -\sum n^2\alpha_n\cos(nx) + n^2\beta_n\sin(nx)$ et $y^{(2)}(x) = \sum n^4\alpha_n\cos(nx) + n^4\beta_n\sin(nx)$. D'où si y est solution de (E), $\sum(n^4 + 5n^2 + 4)(\alpha_n\cos(nx) + \beta_n\sin(nx)) = |\sin 2x|$ pour tout x. Mais la fonction $g : x \mapsto |\sin 2x|$ est 2π-périodique, paire et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. Donc on sait déjà que $\beta_n = 0$ pour tout n. De plus on peut développer g en série de Fourier et

$$\begin{aligned} a_n(g) &= \frac{2}{\pi}\Big(\int_0^{\pi/2}\sin(2x)\sin(nx)dx - \int_{\pi/2}^{\pi}\sin(2x)\sin(nx)dx\Big) \\ &= \frac{1}{\pi}\Big(\Big[\frac{\sin((n-2)x)}{n-2} - \frac{\sin((n+2)x)}{n+2}\Big]_0^{\pi/2} - \Big[\frac{\sin((n-2)x)}{n-2} - \frac{\sin((n+2)x)}{n+2}\Big]_{\pi/2}^{\pi}\Big) \\ &= \frac{2}{\pi}\Big(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n+2}\Big)\sin(n\pi/2) = \frac{8}{\pi(n^2-4)}\sin(n\pi/2), \end{aligned}$$

pour $n \neq 2$. Pour $n = 2$, on trouve que $a_n(g) = 0$. D'après l'unicité du développement en série de Fourier on en déduit que $\alpha_2 = 0$ et pour $n \neq 2$,

$$(n^4 + 5n^2 + 4)\alpha_n = \frac{8}{\pi(n^2-4)}\sin(n\pi/2) \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha_n = \frac{8}{\pi(n^2-4)(n^4+5n^2+4)}\sin(n\pi/2).$$

On a donc trouver une solution particulière, $\sum_{n\neq 2}\frac{8}{\pi(n^2-4)(n^4+5n^2+4)}\sin(n\pi/2)\cos(nx)$. □