Correction d'exercices de la feuille n^o 3:

Formes linéaires et espace dual

(1) **(*)** Soit $E = \mathbb{R}^n[X]$. L'application $P \in E \mapsto P(1)$ est-elle une forme linéaire sur E?

Proof. Pour tout réel λ et pour tout polynômes P et Q de E, il est clair que $(\lambda P + Q)(1) = \lambda P(1) + Q(1)$. Il s'agit bien d'une forme linéaire sur E. □

(2) **(**)** Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et soit u et v deux formes linéaires sur E telles que $\ker u \neq \ker v$. Déterminer les dimensions de $\ker u + \ker v$ et de $\ker u \cap \ker v$.

Proof. On sait que $\ker u$ et $\ker v$ sont des s.e.v. de dimension $n-1$. Comme $\ker u \neq \ker v$, il existe F s.e.v. de $\ker v$ de dimension 1 tel que $E = \ker u + F$ (si F n'existait pas cela signifierait que $\ker u = \ker v$). Donc $\dim(\ker u + \ker v) = n$. De plus d'après le cours, on sait que $\dim\big(\ker u \cap \ker v\big) = n - 2$. □

(3) **(**)** Soit $E = \mathbb{R}^n$. Pour $x = (x_1, \cdots, x_n) \in E$, on pose $f_i(x) = x_i + x_{i+1}$ pour $i = 1, \cdots, n-1$ et $f_n(x) = x_n + x_1$. Montrer que la famille $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille de formes linéaires sur E. A quelle condition est-ce une base de l'espace dual E^*? Dans le case où c'est bien une base duale de cette base.

Proof. $(f_i)_{1\leq i\leq n}$ est une famille de formes linéaires car pour $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ dans E et pour $1 \leq i \leq n-1$, $f_i(\lambda x + y) = (\lambda x_i + y_i) + (\lambda x_{i+1} + y_{i+1}) = \lambda(x_i + x_{i+1}) + (y_i + y_{i+1})$. On peut faire de même pour $f_n(\lambda x + y) = (\lambda x_n + y_n) + (\lambda x_0 + y_0) = \lambda(x_n + x_0) + (y_n + y_0)$.
La famille $(f_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base si et seulement si n est impair. En effet, comme E est de dimension finie, il suffit de montrer que c'est une famille libre. Soient $(\lambda_i)_{i=1,\ldots,n}$ telles que $\sum_i \lambda_i f_i(x) = 0 \ \forall x$.
La dernière équation est vraie en particulier pour $x = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ (on peut faire bouger la position du 1). Ce qui donne le système suivant:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_n & = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 & = 0 \\ \vdots & \\ \lambda_{n-1} + \lambda_n & = 0 \end{cases}$$

Donc $\lambda_1 = -\lambda_n$ et $\lambda_1 = -\lambda_2 = \cdots = (-1)^{n-1}\lambda_n$. Lorsque n est impair $\lambda_i = 0 \ \forall i$, sinon on peut toujours trouver des solutions non nulles au système. □

(4) **(**)** Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. Montrer qu'il existe $q \in E$ tel que, pour tout $p \in \mathbb{R}_n[X]$ on ait

$$p(1) = \int_0^1 p(t)q(t)dt.$$

Calculer q dans le cas $n = 2$.

Proof. D'après le théorème de représentation de Riesz, toute forme linéaire s'écrit de manière unique comme un produit scalaire par rapport à un vecteur. Or, l'application $P \in E \mapsto P(1)$ est une forme linéaire sur E (cf. exercice 1) et $< p, q >= \int_0^1 p(t)q(t)dt$ est bien un produit scalaire, d'où l'existence de q.
Cas $n = 2$. Soit $q(t) = t^2 + a_1 t + a_0$, on a : $p(1) = \int_0^1 p(t)(t^2 + a_1 t + a_0)dt$, pour tout polynôme p de E, en particulier pour les polynômes $p(t) = 1$, $p(t) = t$ et $p(t) = t^2$. Il suffit alors de résoudre le système suivant

$$:\begin{cases} 1 = & \int_0^1 (t^2 + a_1 t + a_0)dt \\ 1 = & \int_0^1 (t^3 + a_1 t^2 + a_0 t)dt \\ 1 = & \int_0^1 (t^4 + a_1 t^3 + a_0 t^2)dt \end{cases}$$

□

(5) **(**)** Soit $E = \mathbb{R}^n[X]$, soit $a \in \mathbb{R}$ et pour tout $k = 0, 1, \cdots, n$, on pose $P_k(X) = (X-a)^k$. Montrer que $e = (P_0, P_1, \cdots, P_n)$ est une base de E. Déterminer la base e^* duale de e et calculer les composantes sur e^* de la forme linéaire $\phi : P \mapsto \int_0^a P(t)dt$.

Proof. $e = (P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base de E car c'est une famille libre. Prenons $(\lambda_i)_{i=1,\ldots,n}$ telles que $\sum_i \lambda_i (X - a)^i = 0$. En dérivant n fois cette équation, on a : $n!\lambda_n = 0$, avec la $(n-1)$-ème dérivée on trouve que $\lambda_{n-1} = 0$ et ainsi de suite pour avoir $\lambda_i = 0 \ \forall i$.
e^* est une base duale de e si pour tout $i, j = 1, \ldots, n$, $e_j^*(P_i) = \delta_{ij}$.

Ceci est vrai pour $P \in E \mapsto \begin{cases} \frac{d^{(k)}P}{k!} & \text{si degré}(P) \leq k \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$ □

(6) **(**)** Soit $E = \mathbb{R}^n[X]$, soit $(b_0, \cdots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Pour tout $i = 0, 1, \cdots, n$, on note $u_i : P \in E \mapsto P(b_i)$. Montrer que la famille $(u_0, u_1, \cdots, u_n)$ est une base de E^* si et seulement si les b_i sont tous distincts.

Proof. Soient $(\lambda_i)_{i=1,\ldots,n}$ telles que pour tout $P \in E$, $\sum_i \lambda_i u_i(P) = 0$.
En particulier pour $P_j = \prod_{i=1,i\neq j}(X - b_i)$. Or $\begin{cases} u_i(P_j) = 0 & \text{si } i \neq j \\ u_i(P_i) = \prod_{k=1,k\neq i}(b_i - b_k) & \text{si } i = j \end{cases}$ On a alors, pour tout i, $\lambda_i \prod_{k=1,k\neq i}(b_i - b_k) = 0$. Par suite, $\lambda_i = 0$ si et seulement si les b_i sont tous distincts.

$\square$

(7) **(*)** Soit $E = \mathbb{R}^n[X]$. Montrer que l'ensemble des polynômes P de E tels que $\int_{-1}^{1} P(x)dx = 0$ est bien un s.e.v. de E. Donner une base de cet ensemble.

Proof. L'ensemble des polynômes P de E tels que $\int_0^1 P(x)dx$ est bien un s.e.v. de E car c'est le noyau d'une forme linéaire non nulle de E^*. Une base de cet hyperplan de E est la base $(X^k - \frac{1}{k+1})_{k=1,\ldots,n}$. $\square$