Correction de quelques exercices de la feuille n^o 4:

Application linéaire adjointe et réduction des matrices symétriques et orthogonales

(3) **(***)** Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E tel que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| \leq 1$. On pose $u = Id - f$. Montrer que $E = \ker(f - Id) \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Im}(f - Id)$, puis que $(\operatorname{Im} u)^{\perp} = \ker u = \ker(u^*)$.

Proof. Commençons par montrer que $ker(f - Id)$ et $Im(f - Id)$ sont orthogonaux. Soit $x \in ker(f - Id)$ et $y \in Im(f - Id)$. Alors $f(x) = x$ et il existe $z \in E$ tel que $y = f(z) - z$. Notamment pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$y = f(z + \lambda x) - (z + \lambda x),$$

donc

$$1 \geq \|f(z + \lambda x)\|^2 = \|y + z + \lambda x\|^2 = \|z + \lambda x\|^2 + 2\lambda < x, y > +2 < z, y > +\|y\|^2.$$

En divisant par λ et en faisant tendre λ vers $\pm\infty$ on a : $< x, y >= 0$. Ce qui entraîne que les deux sous espaces vectoriels sont orthogonaux.
Ensuite montrons qu'ils sont supplémentaires. Ceci revient à montrer que $E = ker(f - Id) \ + Im(f - Id)$ et $ker(f - Id) \cap Im(f - Id) = \{0\}$. La deuxième condition est immédiate puisqu'ils sont orthogonaux. Pour montrer la première on utilise le théorème du rang d'une part et d'autre part du fait que $(Im(f - Id)) + ker(f - Id) \subset E$.
Montrons maintenant la dernière égalité. D'après ce qui précède $(Imu)^{\perp} = keru$. Montrons que $keru^* = (Imu)^{\perp}$:

$$x \in keru^* \Leftrightarrow u^*(x) = 0 \Leftrightarrow \forall y \in E, < u^*(x), y >= 0.$$

Puis que $< u^*(x), y >=< x, u(y) >$ on a :

$$x \in keru^* \Leftrightarrow \forall y \in E, < x, u(y) >= 0 \Leftrightarrow x \in (Imu)^{\perp}.$$

□

(5) **(***)** Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E tel que $f^2 = Id$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes
(a) f est une symétrie orthogonale.
(b) f est symétrique ($f^* = f$ c'est à dire pour tout $x, y \in E$, $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$).
(c) f est une transformation orthogonale *i.e.* préserve le produit scalaire : $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.

Proof. Pour montrer ces équivalences on montrera que $a) \Rightarrow b) \Rightarrow c) \Rightarrow a)$.

1. Supposons $a)$ vrai et montrons $b)$. Soit E et G deus sous espaces supplémentaires dans E : tout vecteur $x \in E$ s'écrit de manière unique $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F$ et $x_2 \in G$. La symétrie orthogonale sur F par rapport à G est l'endomorphisme de E qui à tout $x \in E$ associe le vecteur $x_1 - x_2$. Soit f cette symétrie orthogonale donc $f(x) = x_1 - x_2$. Montrons que f est symétrique *i.e* que $f = f^*$. Soient $x, y \in E$ tels que $x = x_1 + x_2$ et $y = y_1 + y_2$ avec $x_1, y_1 \in F$ et $x_2, y_2 \in G$. Calculons $< f(x), y >$ et $< x, f(y) >$:

$$< f(x), y >=< x_1 - x_2, y_1 + y_2 >=< x_1, y_1 > + < x_1, y_2 > - < x_2, y_1 > - < x_2, y_2 >$$

d'une part, et

$$< x, f(y) >=< x_1 + x_2, y_1 - y_2 >=< x_1, y_1 > - < x_1, y_2 > + < x_2, y_1 > - < x_2, y_2 >$$

d'utre part. Mais $< x_1, y_2 >=< x_2, y_1 >= 0$ car F et G sont orthogonaux,// donc $< f(x), y >=< x, f(y) >$. Puis que $\forall x, y \in E, < f(x), y >=< x, f^*(y) >$ on a $f = f^*$.

2. Supposons $b)$ vrai *i.e* que $f = f^*$ et montrons $c)$. Pour cela calculons $< f(x), f(y) >$:

$$< f(x), f(y) >=< x, f^*(f(y)) >=< x, f^2(y) >=< x, y >$$

car $f = f^*$ et $f^2 = Id$.
3. Supposons $c)$ vrai et montrons $a)$. Ceci est immédiat par définition de la symétrie. □

(6) **(**)** Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice orthogonale. Montrer que

$$\left| \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \right| \leq n.$$

Indication : Utiliser le vecteur $u = (1, 1, \ldots, 1)$.

Proof. Au est une vecteur colonne dont la i-ieme composante vaut $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$. De plus comme A est une matrice orthogonale, on a $\|Au\| = \|u\| = \sqrt{n}$ (i.e conservation de la norme). Puis que $| < u, Au > | = |\sum_{i,j} a_{ij}|$, on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour conclure. □

(7) **(**)** Soit $(E, <\cdot,\cdot>)$ un espace préhilbertien et soit $f : E \to E$ une application telle que $f(0) = 0$ et $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$ pour tout $x,\, y \in E$. Montrer que $< f(x), f(y) >=< x, y >$ pour tout $x,\, y \in E$. En déduire que f est une application linéaire orthogonale.

Proof. On sait que

$$\|f(x) - f(y)\|^2 =< f(x) - f(y), f(x) - f(y) >= \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2 < f(x), f(y) >$$

d'une part,

$$\|x - y\|^2 =< x - y, x - y >=< x, x > -2 < x, y > + < y, y >= \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2 < x, y >$$

d'autre part.
Comme $\|f(x) - f(y)\|^2 = \|x - y\|^2$, on obtient que $< f(x), f(y) >=< x, y >$.
Montrons que f est une application linéaire orthogonale. Pour cela calculons pour tout $x, y \in E$ l'expression $\|f(x + \lambda y) - f(x) - \lambda f(y)\|^2$. En utilisant ce qui précède on trouve que cette expression est nulle. Ce qui prouve la linéarité. □

(15) **(**)** Déterminer la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, de la symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation $x + y - z = 0$.

Proof. Soit $X' = (x', y', z')$ l'image de $X = (x, y, z)$ dans la symétrie orthogonale par rapport au plan $x + y - z = 0$. On écrit que le milieu $\frac{X'+X}{2}$ est dans le plan P, et que le vecteur $X' - X$ est perpendiculaire à ce plan, i.e. parallèle au vecteur $(1, 1, -1)$. On obtient ainsi les équations:

$$(x' + x) + (y' + y) - (z' + z) = 0,\ \frac{x' - x}{1} = \frac{y' - y}{1} = \frac{z' - z}{1},$$

qui se résolvent en:

$$x' = \frac{x - 2y + 2z}{3},\ y' = \frac{-2x + y + 2z}{3},\ z' = \frac{2x + 2y + z}{3}.$$

□