Correction de quelques exercices de la feuille $n^o$ 5:

**Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques**

(1) **(*)** Soit $(E, <.,.>)$ un espace préhilbertien. Montrer que l'application $\psi(x,y) =< x,y >$ est une forme bilinéaire symétrique sur $E$. Montrer que la forme quadratique associée à $\psi$ est définie positive.

*Proof.* Soient $\lambda_1$ et $\lambda_2$ dans $\mathbb{R}$. Alors $\psi(x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 < x, y_1 > +\lambda_2 < x, y_2 >$ . De plus, $\psi(x,y) = \psi(y,x)$ (symétrie du produit scalaire). La forme quadratique associée s'écrit: $q(x,x) =< x,x >= \|x\|^2$, définie positive (propriétés de la norme). $\square$

(2) **(*)** Soit $(E, <.,.>)$ un espace préhilbertien et $u$ un endomorphisme sur $E$. Montrer que l'application $\Phi(x) =< x, u(x) >$ pour tout $x \in E$ est une forme quadratique sur $E$. Déterminer l'endomorphisme associé à $\Phi$.

*Proof.* Soit $\lambda$ dans $\mathbb{R}$, $\Phi(\lambda x) =< \lambda x, u(\lambda x) >=< \lambda x, \lambda u(x) >= \lambda^2 < x, u(x) > \lambda^2 \Phi(x)$. De plus, pour tout $x, y$ dans $E^2$, $\Phi(x+y) =< x+y, u(x)+u(y) >=< x, u(x) > + < y, u(y) > + < x, u(y) > + < y, u(x) >= \Phi(x) + \Phi(y) + < x, u(y) > + < y, u(x) >$ . On pose $\psi(x,y) = \frac{1}{2}(< x, u(y) > + < y, u(x) >)$ et on montre facilement que c'est une forme bilinéaire symétrique. On peut alors conclure que $\Phi$ est bien une forme quadratique.
Soit $v$ l'endomorphisme associé à $\Phi$. On sait que : $\psi(x,y) =< x, v(y) >$ or $\psi(x,y) = \frac{1}{2}(< x, u(y) > + < y, u(x) >) = \frac{1}{2}(< x, u(y) > + < x, u^*(y) >) = \frac{1}{2} < x, u(y) + u^*(y) >$. On a alors, $v(x) = \frac{1}{2}(u(x) + u^*(x))$. $\square$

(3) **(**)** Soit $< .,. >$ le produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ tel que pour $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$, $< x, y >= 2x_1y_1 + 3x_2y_2$. A partir de la base orthonormale classique $e = (i, j)$ de $\mathbb{R}^2$, déterminer une base $e' = (e'_1, e'_2)$ orthonormale pour ce produit scalaire. Déterminer les coordonnées dans $e'$ d'un vecteur quelconque $x$ ayant pour coordonnées $(x_1, x_2)$ dans $e$.

(4) **(*)** Déterminer la signature des formes quadratiques suivantes :
(a) $\Phi_1(x,y) = x^2 - xy + y^2$;
(b) $\Phi_2(x,y) = x^2 + xy - y^2$;
(c) $\Phi_3(x,y) = 3(x+y)^2 - 4(x-y)^2 - 13xy$;
(d) $\Phi_4(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - zy$;
(e) $\Phi_4(x,y,z,t) = 2x\,y + 2z\,t - 2y\,z - 2x\,t$.

*Proof.* Utilisation du procédé d'orthogonalisation de Gauss:
(a) $\Phi_1(x,y) = x^2 - xy + y^2 = (x - \frac{1}{2}y)^2 + \frac{3}{4}y^2$.
$sgn(\Phi_1) = (2,0)$.
(b) $\Phi_2(x,y) = x^2 + xy - y^2 = (x + \frac{1}{2}y)^2 - \frac{5}{4}y^2$.
$sgn(\Phi_2) = (1,1)$.
(c) $\Phi_3(x,y) = 3(x+y)^2 - 4(x-y)^2 - 13xy = 3(x^2+y^2+2xy) - 4(x^2+y^2-2xy) - 13xy = -x^2 - y^2 + xy = -\Phi_1(x,y)$.
$sgn(\Phi 3) = (0,2)$.
(d) $\Phi_4(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - zy = (x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z)^2 + \frac{3}{4}(y-z)^2$.
$sgn(\Phi_4) = (2,0)$.
$\square$

(5) **(**)** On considère sur $\mathbb{R}^3$ la forme quadratique
$$q(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_1.$$
(a) Montrer que $q$ est définie positive.
(b) Déterminer une base orthonormale pour $q$, d'abord par la méthode de Gauss (base notée $\mathcal{B}'$), puis par le procédé d'orthonormalisation de Gramm-Schmidt.
(c) Quelle est la matrice $P$ de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}'$.

*Proof.* (a) Écrivons $q(x)$ comme étant une combinaison linéaire de de carrés de formes linéaires linéairement indépendantes en utilisant le procédé d'orthogonalisation de Gauss :
$q(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_1 = 2(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3)^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{3}{2}x_3^2 + 2x_2x_3 = 2(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3)^2 + \frac{1}{2}(x_2^2 + x_3)^2 + x_3^2$. $sgn(q) = (3,0)$, donc $q$ est bien positive. $q$ est bien définie positive car $q(x) = 0$ ssi $x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0$, $x_2^2 + x_3 = 0$ et $x_3 = 0$ ssi $x_1 = x_2 = x_3 = 0$

(b) Méthode de Gauss:

Soient $\left\{\begin{array}{lcl} a &=& x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3 \\ b &=& \frac{x_2}{2}+x_3 \\ c &=& x_3 \end{array}\right.$

Déterminons la base duale $v_1, v_2, v_3$ de cette base de formes linéaires.

$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 &=& a-\frac{1}{2}b \\ x_2 &=& b-c \\ x_3 &=& c \end{array}\right.$ Ainsi, $v_1^t = (1,0,0)$, $v_2^t = (-\frac{1}{2},1,0)$ et $v_3^t = (0,-1,1)$. C'est une base orthogonale.

$u_1^t = (1,0,0), u_2^t = (0,-\frac{1}{\sqrt(2)},\frac{1}{\sqrt(2)}), u_3^t = (-\frac{1}{\sqrt(5)},\frac{2}{\sqrt(5)},0)$ est bien une base orthonormale.

Procédé d'orthogonalisation de Gram Schmidt:
La matrice de $q$ dans la base canonique s'écrit :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

En partant de la base $(b_1, b_2, b_3) = (\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix})$,

on obtient la base $(f_1, f_2, f_3) = (\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt(6)} \\ \frac{1}{\sqrt(6)} \\ \frac{1}{\sqrt(6)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt(3)}{3} \\ \frac{\sqrt(3)}{3} \\ \frac{\sqrt(3)}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt(2)}{2} \\ \frac{\sqrt(2)}{2} \end{pmatrix})$

(c) Soit $(e_1, e_2, e_3)$ la base canonique.

$\left\{\begin{array}{lcl} u_1 &=& e_1 \\ u_2 &=& -\frac{1}{\sqrt(5)}e_1+\frac{2}{\sqrt(5)}e_2 \\ u_3 &=& -\frac{1}{\sqrt(2)}e_2+\frac{1}{\sqrt(2)} \end{array}\right.$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt(5)}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt(5)}{2} & \sqrt(2) \end{pmatrix}$$

□

(6) **(**)** Suivant la valeur de $\lambda$, étudier la signature de la forme quadratique suivante:

$$\Phi(x,y) = (1+\lambda)(x^2+y^2)+2(1-\lambda)x\,y \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

*Proof.* Signature de $\Phi$:

- Si $\lambda = -1$, $\Phi(x,y) = (x-y)^2-(x+y)^2$, $sgn(\Phi) = (1,1)$
- Si $\lambda \neq -1$, $\Phi(x,y) = (1+\lambda)(x+\frac{1-\lambda}{1+\lambda}y)^2+(1+\lambda-\frac{4\lambda}{(1+\lambda)^2})y^2$
  - Si $\lambda < -1, sgn(\Phi) = (0,2)$
  - Si $-1 < \lambda < 0, sgn(\Phi) = (1,1)$
  - Si $\lambda > 0, sgn(\Phi) = (2,0)$
  - Si $\lambda = 0, sgn(\Phi) = (1,0)$

□

(7) **(*)** Démontrer que la forme quadratique $\Phi(x,y,z) = x^2+(z-y)^2$ est positive. Est-elle définie positive ? Résoudre $\Phi(x,y,z) = 0$.

*Proof.* $\Phi(x,y,z) = x^2+(z-y)^2 \geq 0$, donc $\Phi$ est bien positive, mais elle n'est pas définie positive car son noyau n'est pas réduit à l'élément neutre. Par exemple $\Phi(0,2,2) = 0$.

$\Phi(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 0 \\ y &=& z \end{array}\right.$ □