Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2008 – 2009

Algèbre S4

Contrôle continu n°1, mars 2009

Examen de 1h00. Tout document ou calculatrice est interdit.

1. Soit $E = \mathbf{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficients réels. Pour P et Q dans E tels que $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et $Q(X) = \sum_{k=0}^n b_k X^k$, on pose

$$< P, Q >= \sum_{k=0}^{n} (k+1)^2 a_k b_k.$$

   (a) Rappeler une base de E ainsi que la dimension de E.

   (b) Montrer que $< \cdot, \cdot >$ est bien un produit scalaire sur E.

   (c) Déterminer une base orthonormale de E lorsque $n = 2$, puis pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

   (d) Lorsque $n = 3$, déduire de la question précédente la projection orthogonale de X^3 sur $\mathbf{R}_2[X]$.

2. Soit $E = \mathbf{R}^2$. Pour $x = (x_1, x_2) \in E$, on considère la norme $\|x\|_1 = \sqrt{x_1^2 + 4x_2^2}$ et la norme $\|x\|_2 = \max(|x_1|, |x_2|)$ (on admettra que ce sont bien deux normes).

   (a) Montrer qu'il existe $m > 0$ et $M > 0$ tels que $m\,\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq M\,\|x\|_2$ pour tout $x \in E$. Déterminer des valeurs pour m et M.

   (b) Montrer que $\|\cdot\|_1$ est associée à un produit scalaire que l'on déterminera. Déterminer une base orthonormale pour ce produit scalaire.

   (c) Montrer que $\|\cdot\|_2$ n'est pas associée à un produit scalaire.