Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2008 – 2009

Algèbre S4

Correction du contrôle continu n°1, mars 2009

Examen de 1h00. Tout document ou calculatrice est interdit.

1. Soit $E = \mathbf{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficients réels. Pour P et Q dans E tels que $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et $Q(X) = \sum_{k=0}^n b_k X^k$, on pose
$$< P, Q >= \sum_{k=0}^n (k+1)^2 a_k b_k.$$
   (a) Rappeler une base de E ainsi que la dimension de E.
   (b) Montrer que $< \cdot, \cdot >$ est bien un produit scalaire sur E.
   (c) Déterminer une base orthonormale de E lorsque $n = 2$, puis pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.
   (d) Lorsque $n = 3$, déduire de la question précédente la projection orthogonale de X^3 sur $\mathbf{R}_2[X]$.

Proof. (a) $(1, X, \cdots, X^n)$ est une base de $\mathbf{R}_n[X]$ donc $\dim E = n + 1$.
(b) Pour $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, $Q(X) = \sum_{k=0}^n b_k X^k$ et $R(X) = \sum_{k=0}^n c_k X^k$, $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$, alors $\lambda Q(X) + \mu P(X) = \sum_{k=0}^n (\lambda b_k + \mu c_k) X^k$, donc $< P, \lambda Q + \mu R >= \sum_{k=0}^n (k+1)^2 a_k (\lambda b_k + \mu c_k) = \lambda \sum_{k=0}^n (k+1)^2 a_k b_k + \mu \sum_{k=0}^n (k+1)^2 a_k c_k = \lambda < P, Q > + \mu < P, R >$: la propriété de linéarité est bien vérifiée. Ensuite, il est clair que $< P, Q >= \sum_{k=0}^n (k+1)^2 a_k b_k = \sum_{k=0}^n (k+1)^2 b_k a_k =< Q, P >$. De plus, $< P, P >= \sum_{k=0}^n (k+1)^2 a_k^2 \geq 0$. Enfin, $< P, P >= 0 \iff \sum_{k=0}^n (k+1)^2 a_k^2 = 0 \iff \forall k = 0, \cdots, n,\ (k+1)^2 a_k = 0 \iff \forall k = 0, \cdots, n,\ a_k = 0$, car une somme de terme positifs ou nuls, n'est nulle que si chacun des termes est nul. En conséquence, $< P, P >= 0 \iff P = 0$. Donc $< P, Q >$ est bien un produit scalaire.
(c) On sait que $(1, X, X^2)$ est une base de $\mathbf{R}_2[X]$. On utilise le procédé d'orthonormalisation de Grahm-Schmidt pour en déduire une base orthonormale. Ainsi $e_1 = 1/\|1\| = 1$ car $\|1\| = 1$. Puis, $e_2 = (X - < X, e_1 > e_1)/\|X - < X, e_1 > e_1\|$. Mais $< 1, X >= 0$, donc $X - < X, e_1 > e_1 = X$ et $e_2 = X/2$ car $\|X\| = \sqrt{0 + 2^2 \times 1}$. Enfin, $e_3 = (X^2 - < X^2, e_1 > e_1 - < X^2, e_2 > e_2)/\|X^2 - < X^2, e_1 > e_1 - < X^2, e_2 > e_2\|$. Mais $< X^2, e_1 >=< X^2, e_2 >= 0$. D'où $e_2 = X^2/\|X^2\| = X^2/3$. Donc $(1, X/2, X^2/3)$ est une base orthonormale de $\mathbf{R}_2[X]$.
Le procédé se généralise clairement pour n quelconque et $(1, X/2, X^2/3, \cdots, X^n/(n+1))$ est une base orthonormale de $\mathbf{R}^n[X]$. (d) Soit $P_2(X^3)$ le projeté orthogonale de X^3 sur $\mathbf{R}^2[X]$. Alors on sait que $P_2(X^3) = \sum_{k=1}^3 < X^3, e_k > e_k$. Mais $< X^3, 1 >=< X^3, X/2 >=< X^3, X^2/3 >= 0$. Donc $P_2(X^3) = 0$: en fait, X^3 est orthogonal à $\mathbf{R}^2[X]$. □

2. Soit $E = \mathbf{R}^2$. Pour $x = (x_1, x_2) \in E$, on considère la norme $\|x\|_1 = \sqrt{x_1^2 + 4x_2^2}$ et la norme $\|x\|_2 = \max(|x_1|, |x_2|)$ (on admettra que ce sont bien deux normes).
   (a) Montrer qu'il existe $m > 0$ et $M > 0$ tels que $m \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq M \|x\|_2$ pour tout $x \in E$. Déterminer des valeurs pour m et M.
   (b) Montrer que $\| \cdot \|_1$ est associée à un produit scalaire que l'on déterminera. Déterminer une base orthonormale pour ce produit scalaire.
   (c) Montrer que $\| \cdot \|_2$ n'est pas associée à un produit scalaire.

Proof. (a) On considère des normes sur $\mathbf{R}^2$ espace vectoriel de dimension finie. On sait qu'alors toutes les normes sont équivalentes donc on a bien l'existence de $m > 0$ et $M > 0$ tels que $m\,\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq M\,\|x\|_2$ pour tout $x \in E$. Pour $x = (x_1, x_2)$, il est clair que $\|x\|_1 = \sqrt{x_1^2 + 4x_2^2} \geq \sqrt{x_1^2} = |x_1|$ et $\|x\|_1 = \sqrt{x_1^2 + 4x_2^2} \geq \sqrt{4x_2^2} = 2|x_2| \geq |x_2|$. Donc $\|x\|_1 \geq \max(|x_1|, |x_2|) = \|x\|_2$. Par ailleurs, $x_1^2 \leq \|x\|_2^2$ et $4x_2^2 \leq 4\|x\|_2^2$. Donc $x_1^2 + 4x_2^2 \leq 5\|x\|_2^2$ soit $\|x\|_1 = \sqrt{x_1^2 + 4x_2^2} \leq \sqrt{5}\,\|x\|_2$. Ainsi on a montré que $\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{5}\,\|x\|_2$: $m = 1$ et $M = \sqrt{5}$ sont des valeurs possibles.
(b) Pour $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$, soit $< x, y >= x_1y_1 + 4x_2y_2$: c'est bien un produit scalaire car de la forme $\sum_{i=1}^n p_i x_i y_i$ avec $p_i > 0$. De plus, $< x, x >= \|x\|_1^2$. Donc on a bien trouvé le produit scalaire associé à $\|\cdot\|_1$. Une base de $\mathbf{R}^2$ est $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$. Avec le procédé d'orthonormalisation de Grahm-Schmidt, $f_1 = e_1/\|e_1\|_1 = e_1$ et $f_2 = (e_2 - < e_2, f_1 > f_1)/\|e_2 - < e_2, f_1 > f_1\|_1$. Mais $< e_2, f_1 >= 0$, d'où $f_2 = e_2/\|e_2\|_1 = e_2/2$. Alors (f_1, f_2) est une base orthonormale de $\mathbf{R}^2$.
(c) On sait que si $\|\cdot\|_2$ est une norme associée à un produit scalaire, alors ce produit scalaire sera tel que $< x, y >= (\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)/2$. Pour un tel produit scalaire, ce qui va "clocher" c'est la linéarité, parce que l'on travaille avec des valeurs absolues qui ne sont pas linéaires. Par exemple, pour $x = (1, -1)$, donc $\|x\|_2 = 1$ et $y = (-2, 0)$, soit $\|y\|_2 = 2$ et $\|x + y\|_2 = 1$ alors $< x, y >_2 = -1$. Pourtant, $< x, 2y >_2 = (3 - 4 - 1)/2 = -1$ donc $< x, 2y >_2 \neq 2 < x, y >_2$: ce n'est pas un produit scalaire.

$\square$