Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2008 − 2009

Algèbre S4

Contrôle continu n°2, mars 2009

Examen de 1h30. Tout document ou calculatrice est interdit.

1. Soit E l'ensemble des fonctions à valeurs réelles continues sur $[0,1]$. Pour $f, g \in E$, on considère
$$< f, g >= \int_0^1 x f(x) g(x) dx.$$
   (a) Montrer que $< \cdot, \cdot >$ est bien un produit scalaire sur E (on pourra utiliser sans démonstration le fait que si h est une fonction continue positive sur $[0,1]$ alors $\int_0^1 h(x)dx = 0 \implies h = 0$).
   (b) Soit $H = \{f \in E,\ f(0) = 0\}$. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de E. Montrer que $\dim H = +\infty$.
   (c) Montrer que si $g \in E$ alors la fonction $x \mapsto xg(x)$ appartient à H. En déduire que $H^{\perp} = \{0\}$.
   (d) Expliquer pourquoi on a $E \neq H + H^{\perp}$.
   (e) Soit $\mathbf{R}_1[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 1. Déterminer une base orthonormale de $\mathbf{R}_1[X]$. En déduire la projection orthogonale des fonctions $x \mapsto 2 - x$ et $x \mapsto \sin(\pi x)$ sur $\mathbf{R}_1[X]$.

2. Soient $a \geq 0$ et f la fonction 2π-périodique telle que pour tout $x \in [0, 2\pi[,\ f(x) = e^{ax}$.
   (a) Pour $a > 0$, tracer la fonction f sur $[-4\pi, 4\pi]$ après l'avoir étudiée. f est-elle continue sur $\mathbf{R}$? Est-elle paire ou impaire?
   (b) Pour $a = 0$, donner sans calcul le développement en série de Fourier de f.
   (c) Pour $a > 0$, calculer les coefficients de Fourier de f à l'aide d'une double intégration par partie (on rappelle que les coefficients de Fourier peuvent être calculés sur $[-\pi, -\pi]$ comme sur $[0, 2\pi]$ ou tout autre intervalle de longueur 2π). En déduire que la série de Fourier de f est
$$S_f(x) = \frac{e^{2a\pi} - 1}{\pi} \Big(\frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{n^2 + a^2} \cos(nx) - \frac{n}{n^2 + a^2} \sin(nx) \Big).$$
   (d) Après avoir justifier son utilisation, appliquer le Théorème de Bessel à f.
   (e) Montrer que $\lim_{a \to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. En utilisant la question précédente, déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (on pourra utiliser un développement limité à l'ordre 2 de $e^{2a\pi}$).
   (f) Déterminer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+a^2}$ pour $a > 0$ (on pourra appliquer, après justification, le Théorème de Dirichlet).