Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2008 – 2009

Algèbre S4

Contrôle continu n°2, mars 2009

Examen de 1h30. Tout document ou calculatrice est interdit.

1. Soit E l'ensemble des fonctions à valeurs réelles continues sur $[0,1]$. Pour $f,g \in E$, on considère
$$< f,g >= \int_0^1 xf(x)g(x)dx.$$
   (a) Montrer que $< \cdot,\cdot >$ est bien un produit scalaire sur E (on pourra utiliser sans démonstration le fait que si h est une fonction continue positive sur $[0,1]$ alors $\int_0^1 h(x)dx = 0 \implies h = 0$).
   (b) Soit $H = \{f \in E,\ f(0) = 0\}$. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de E. Montrer que $\dim H = +\infty$.
   (c) Montrer que si $g \in E$ alors la fonction $x \mapsto xg(x)$ appartient à H. En déduire que $H^\perp = \{0\}$.
   (d) Expliquer pourquoi on a $E \neq H + H^\perp$.
   (e) Soit $\mathbf{R}_1[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 1. Déterminer une base orthonormale de $\mathbf{R}_1[X]$. En déduire la projection orthogonale des fonctions $x \mapsto 2-x$ et $x \mapsto \sin(\pi x)$ sur $\mathbf{R}_1[X]$.

Proof. (a) Pour f,g et h dans E et $\lambda,\mu \in \mathbf{R}$, alors $< f,\lambda g+\mu h >= \int_0^1 xf(x)(\lambda g(x)+\mu h(x))dx = \lambda \int_0^1 xf(x)g(x)dx + \mu \int_0^1 xf(x)h(x)dx = \lambda < f,g > +\mu < f,h >$. Il est clair que $< f,g >=< g,f >$ et $< f,f >= \int_0^1 xf^2(x)dx \geq 0$ car l'intégrale d'une fonction positive est positive. Enfin, $< f,f >= 0 \Longleftrightarrow \int_0^1 xf^2(x)dx = 0 \Longleftrightarrow xf^2(x) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$ car la fonction $x \mapsto xf^2(x)$ est continue et positive sur $[0,1]$. Aussi comme pour $x > 0$ pour $x \in]0,1]$, alors $f(x) = 0$ pour tout $x \in]0,1]$ et comme f est continue alors $f(x) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$. En conséquence, $< \cdot,\cdot >$ est un produit scalaire.
(b) Il est clair que $H \subset E$ et que la fonction $x \mapsto 0$ (la fonction nulle) appartient à H. De plus, pour $f,g \in H$ et $\lambda,\mu \in \mathbf{R}$, alors $(\lambda f+\mu g)(0) = \lambda f(0)+\mu g(0) = 0$ car $f(0) = g(0) = 0$ du fait que f et g soient dans H.
Les fonctions $f_k(x) = x^k$ sont continues sur $[0,1]$ et appartiennent à H (car $f_k(0) = 0$) pour tout $k \in \mathbf{N}^*$. De plus il est clair que la famille de vecteurs $(f_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ est libre car les f_k sont des polynômes de degrés différents. Si H était de dimension finie de dimension n, alors $(f_k)_{1\leq k\leq n+1}$ serait une famille libre de $n+1$ vecteurs, d'où contradiction: H n'est pas de dimension finie.
(c) Il est bien clair que la fonction $x \mapsto xg(x)$ est continue (comme produit de fonctions continues) sur $[0,1]$ et pour $x = 0$, $xg(x) = 0$. Donc cette fonction appartient à H.
Si $h \in H^\perp \subset E$, alors pour tout $f \in H$, $< f,h >= 0$. Si cela est vrai pour tout f, cela est vrai en particulier pour la fonction $xh(x)$ puisque $xh(x) \in H$. Aussi doit-on avoir $< h,xh >= \int_0^1 xh^2(x)dx = 0$. Mais d'après la question (a), cela implique que $h = 0$. Donc $H^\perp = \{0\}$.
(d) D'après la question précédente, $H + H^\perp = H$. Mais si $H \subset E$, on a $H \neq E$ car par exemple, la fonction $x \mapsto 1$ appartient à E mais pas à H. Donc $E \neq H + H^\perp$.
(e) Il est clair d'abord que $\mathbf{R}_1[X] \subset E$. On sait que $(1,X)$ est une base de $\mathbf{R}_1[X]$. On utilise le procédé d'orthonormalisation de Grahm-Schmidt, d'où $e_1 = 1/\|1\|$ et comme $\|1\|^2 = \int_0^1 xdx = 1/2$, donc $e_1 = \sqrt{2}$. Ensuite, $e_2 = (X- < X,e_1 > e_1)/\|X- < X,e_1 > e_1\|$. Or, $< X,e_1 >= \sqrt{2}\int_0^1 x^2dx = \sqrt{2}/3$. De plus $\|X-2/3\|^2 = \int_0^1 x(x-2/3)^2dx = \int_0^1 x^3-4x^2/3+4x/9dx = 1/4-4/9+2/9 = 1/36$. D'où $e_2 = 6(X-2/3) = 6X-4$. Donc $(\sqrt{2}, 6X-4)$ est une base orthonormale de $\mathbf{R}_1[X]$.
On a $x \mapsto 2-x \in \mathbf{R}_1[X]$ donc la projection orthogonale de $x \mapsto 2-x$ est $x \mapsto 2-x$.

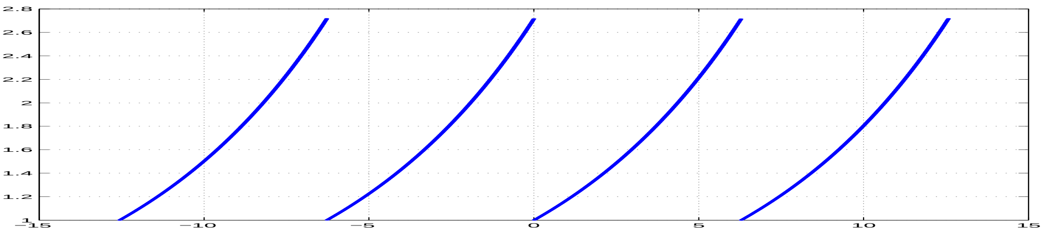
On a $P_{\mathbf{R}_1[X]}(\sin(\pi x)) =< e_1, \sin(\pi x) > e_1 + < 6x-4, \sin(\pi x) > (6x-4) = 2\int_0^1 x\sin(\pi x)dx + (6x-4)\int_0^1 (6x^2 - 4x)\sin(\pi x)dx$. Mais

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x\sin(\pi x)dx &= \Big[-x\frac{\cos(\pi x)}{\pi}\Big]_0^1 + \frac{1}{\pi}\int_0^1 \cos(\pi x)dx = 1 + \Big[\frac{\sin(\pi x)}{\pi^2}\Big]_0^1 = \frac{1}{\pi};\\
\int_0^1 x^2\sin(\pi x)dx &= \Big[-x^2\frac{\cos(\pi x)}{\pi}\Big]_0^1 + \frac{1}{\pi}\int_0^1 2x\cos(\pi x)dx = 1 + \frac{1}{\pi^2}\Big(\Big[2x\frac{\sin(\pi x)}{\pi}\Big]_0^1 - 2\int_0^1 \sin(\pi x)dx\Big)\\
&= \frac{1}{\pi} - \frac{4}{\pi^3}.
\end{aligned}$$

En conséquence, $P_{\mathbf{R}_1[X]}(\sin(\pi x)) = \frac{2}{\pi} + \big(\frac{6}{\pi} - \frac{24}{\pi^3} - \frac{4}{\pi}\big)(6x-4) = 12\big(\frac{1}{\pi} - \frac{12}{\pi^3}\big)x + \big(\frac{96}{\pi^3} - \frac{6}{\pi}\big)$. □

2. Soient $a \geq 0$ et f la fonction 2π-périodique telle que pour tout $x \in [0, 2\pi[$, $f(x) = e^{ax}$.
   (a) Pour $a > 0$, tracer la fonction f sur $[-4\pi, 4\pi]$ après l'avoir étudiée. f est-elle continue sur $\mathbf{R}$? Est-elle paire ou impaire?
   (b) Pour $a = 0$, donner sans calcul le développement en série de Fourier de f.
   (c) Pour $a > 0$, calculer les coefficients de Fourier de f à l'aide d'une double intégration par partie (on rappelle que les coefficients de Fourier peuvent être calculés sur $[-\pi, -\pi]$ comme sur $[0, 2\pi]$ ou tout autre intervalle de longueur 2π). En déduire que la série de Fourier de f est
   $$S_f(x) = \frac{e^{2a\pi} - 1}{\pi}\Big(\frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{n^2 + a^2}\cos(nx) - \frac{n}{n^2 + a^2}\sin(nx)\Big).$$
   (d) Après avoir justifier son utilisation, appliquer le Théorème de Bessel à f.
   (e) Montrer que $\lim_{a\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. En utilisant la question précédente, déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ (on pourra utiliser un développement limité à l'ordre 2 de $e^{2a\pi}$).
   (f) Déterminer $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+a^2}$ pour $a > 0$ (on pourra appliquer, après justification, le Théorème de Dirichlet).

Proof. (a) Sur $[0, 2\pi[$ et avec $a \geq 0$, la fonction $x \mapsto e^{ax}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, elle est croissante et voici le tracé de cette fonction pour $a = 1$:



f n'est pas continue en 0 modulo $[2\pi]$, sauf si $a = 0$ car $\lim_{x\to 2\pi^-} e^{ax} = e^{2a\pi} \neq f(0) = 1$.
Si $a = 0$ alors f est paire. Sinon, f n'est ni paire ni impaire car $f(\pi/2) = e^{a\pi/2} \neq f(-\pi/2) = f(3\pi/2) = e^{3a\pi/2}$.
(b) Pour $a = 0$, $f(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. Alors le développement de Fourier de f est $S_f(x) = f(x) = a_0(f)/2 = 1$ pour tout $x \in \mathbf{R}$ car une fonction constante est polynôme trigonométrique de degré 0.
(c) Pour $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned}
a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{ax}\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\Big(\Big[\frac{e^{ax}}{a}\cos(nx)\Big]_0^{2\pi} + \frac{n}{a}\int_0^{2\pi} e^{ax}\sin(nx)dx\Big)\\
&= \frac{e^{2a\pi} - 1}{a\pi} + \frac{n}{a\pi}\Big(\Big[\frac{e^{ax}}{a}\sin(nx)\Big]_0^{2\pi} - \frac{n}{a}\int_0^{2\pi} e^{ax}\cos(nx)dx\\
&= \frac{e^{2a\pi} - 1}{a\pi} - \frac{n^2}{a^2}a_n(f),
\end{aligned}$$

d'où $a_n(f) = \Big(\dfrac{e^{2a\pi} - 1}{a\pi}\Big)\dfrac{a^2}{n^2 + a^2}$. Grâce à ligne 1 du calcul précédent, on s'aperçoit que

$$a_n(f) = \frac{e^{2a\pi} - 1}{a\pi} + \frac{n}{a}b_n(f) \implies b_n(f) = -\Big(\frac{e^{2a\pi} - 1}{\pi}\Big)\frac{n}{n^2 + a^2}.$$

Donc en utilisant la définition $S_f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)$ on obtient bien le développement proposé.
(d) La fonction f est continue par morceaux, on peut donc appliquer le Théorème de Bessel et on obtient:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{2ax}dx = \frac{a_0^2(f)}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1} a_n^2(f) + b_n^2(f) = \Big(\frac{e^{2a\pi}-1}{\pi}\Big)^2\Big(\frac{1}{4a^2} + \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}\frac{n^2}{(n^2+a^2)^2} + \frac{a^2}{(n^2+a^2)^2}\Big)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{e^{4a\pi}-1}{4a\pi} = \Big(\frac{e^{2a\pi}-1}{\pi}\Big)^2\Big(\frac{1}{4a^2} + \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2+a^2}\Big).$$

(e) Pour $a \in \mathbf{R}$, il y a convergence normale de la série de fonctions $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2}$ car $\sup_{a\in\mathbf{R}}\frac{1}{n^2+a^2} = \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \infty$. De plus la fonction $a \in \mathbf{R} \mapsto \frac{1}{n^2+a^2}$ est continue donc on peut inverser limite et série donc $\lim_{a\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{a\to 0}\frac{1}{n^2+a^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.
On peut d'après la question (d) écrire que:

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2+a^2} = \frac{e^{2a\pi}+1}{e^{2a\pi}-1}\frac{\pi}{2a} - \frac{1}{2a^2}$$

A priori la limite lorsque $a \to 0$ du terme de droite est indéterminée. On va utiliser un développement limité de $e^{2a\pi}$ à l'ordre 2 pour conclure. On sait que $e^{2a\pi} = 1 + 2a\pi + 2a^2\pi^2 + \frac{4}{3}a^3\pi^3 + o(a^3)$. Donc $e^{2a\pi} - 1 = 2a\pi(1 + a\pi + \frac{2}{3}a^2\pi^2 + o(a^2))$ d'où $(e^{2a\pi}-1)^{-1} = (2a\pi)^{-1}(1 - a\pi - \frac{2}{3}a^2\pi^2 + a^2\pi^2 + o(a^2))$ et comme $e^{2a\pi} + 1 = 2 + 2a\pi + 2a^2\pi^2 + o(a^2)$ on a

$$\begin{aligned}
\frac{e^{2a\pi}+1}{e^{2a\pi}-1}\frac{\pi}{2a} - \frac{1}{2a^2} &= \frac{1}{4a^2}(2 + 2a\pi + 2a^2\pi^2 + o(a^2))(1 - a\pi + \frac{1}{3}a^2\pi^2 + o(a^2)) - \frac{1}{2a^2} \\
&= \frac{1}{4a^2}(2 + \frac{2}{3}a^2\pi^2 + o(a^2)) - \frac{1}{2a^2} = \frac{\pi^2}{6} + o(1).
\end{aligned}$$

Par suite, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
(f) Comme la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbf{R}$ (seule discontinuité en 0 modulo $[2\pi]$), on peut appliquer le Théorème de Dirichlet et pour $x \neq 0 \ [2\pi]$, alors $f(x) = S_f(x)$. En particulier pour $x = \pi$, on obtient avec $\cos(n\pi) = (-1)^n$, $S_f(\pi) = \frac{e^{2a\pi}-1}{\pi}\Big(\frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a}{n^2+a^2}\Big)$. Comme $f(\pi) = e^{a\pi}$ on en déduit que:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a}{n^2+a^2} = \frac{\pi e^{a\pi}}{e^{2a\pi}-1} - \frac{1}{2a} \quad \text{d'où} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+a^2} = \frac{\pi e^{a\pi}}{a(e^{2a\pi}-1)} - \frac{1}{2a^2}.$$

$\square$