Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2008 – 2009

Algèbre S4

Contrôle continu n°3, mai 2009

Examen de 1h00. Tout document ou calculatrice est interdit.

1. Soit $E = \mathbf{R}_n[X]$, où $n \geq 2$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. On considère l'application u sur E telle que pour $P \in E$, $u(P) = P'(1) - P'(0)$.

   (a) Montrer que u est une forme linéaire sur E non nulle.

   (b) Montrer que $\ker u$ est de dimension n. Déterminer une base de $\ker u$ pour $n = 2$, puis dans le cas $n \geq 3$.

   (c) Pour $P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ et $Q(X) = \sum_{i=0}^{n} b_i X^i$ appartenant à E on considère le produit scalaire $< P, Q >= \sum_{j=0}^{n} a_j b_j$. Déterminer une base orthonormale de E pour ce produit scalaire. Par rapport à ce produit scalaire, déterminer $(\ker u)^{\perp}$ pour $n = 2$.

2. Soit $E = \mathbf{R}^n$, avec $n \in \mathbf{N}^*$, et $< \cdot, \cdot >$ le produit scalaire canonique sur $\mathbf{R}^n$. Pour $F \subset E$, on considère l'application u telle que pour tout $x \in E$, $u(x) = x_F$ avec l'unique décomposition $x = x_F + x_{F^\perp}$ où $x_F \in F$ et $x_{F^\perp} \in F^\perp$. Le but est de déterminer u^*, application adjointe de u.

   (a) Montrer que u est une application linéaire.

   (b) Montrer que $u_O u = u$. On admettra qu'une application linéaire telle que $u_O u = u$ est un projecteur.

   (c) Si $F = E$, définir u et en déduire la matrice de u dans n'importe quelle base de E. En déduire alors u^*.

   (d) Montrer que u admet pour valeurs propres 0 et 1 et déterminer les s.e.v. propres associés à 0 et 1. Montrer que u est diagonalisable dans une base orthonormale. En déduire qu'il existe une matrice P orthogonale et une matrice D diagonale ne contenant que des 0 et des 1 et telles que que la matrice de u dans n'importe quelle base orthonormale s'écrive $P\,D\,{}^tP$. En déduire que $u^* = u$.