Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2008 – 2009

Algèbre S4

Correction du contrôle continu n°3, mai 2009

Examen de 1h00. Tout document ou calculatrice est interdit.

1. Soit $E = \mathbf{R}_n[X]$, où $n \geq 2$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. On considère l'application u sur E telle que pour $P \in E$, $u(P) = P'(1) - P'(0)$.
   (a) Montrer que u est une forme linéaire sur E non nulle.
   (b) Montrer que $\ker u$ est de dimension n. Déterminer une base de $\ker u$ pour $n = 2$, puis dans le cas $n \geq 3$.
   (c) Pour $P(X) = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ et $Q(X) = \sum_{i=0}^n b_i X^i$ appartenant à E on considère le produit scalaire $< P, Q >= \sum_{j=0}^n a_j b_j$. Déterminer une base orthonormale de E pour ce produit scalaire. Par rapport à ce produit scalaire, déterminer $(\ker u)^{\perp}$ pour $n = 2$.

Proof. (a) u va de E dans $\mathbf{R}$. De plus $u(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) = (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)'(1) - (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)'(0) = \lambda_1 u(P_1) + \lambda_2 u(P_2)$ du fait de la linéarité de la dérivation. Enfin, pour $P(X) = X^2 \in E$ pour tout $n \geq 2$, $u(P) = 2$, donc u est bien une forme linéaire non nulle.
(b) Le noyau d'une forme linéaire est un hyperplan, donc comme E est de dimension $n+1$, alors $\ker u$ est bien de dimension n. On vérifie facilement que pour $P_0(X) = 1$ et $P_1(X) = X$, $u(P_0) = u(P_1) = 0$ et P_0 et P_1 sont non liés (car de degré différent). Donc, pour $n = 2$, comme $\dim \ker u = 2$, (P_0, P_1) est une base de $\ker u$.
Si $n \geq 3$, on vérifie facilement que pour $3 \leq k \leq n$, $P_k(X) = \frac{X^k}{k} - \frac{X^2}{2}$ vérifie $u(P_k) = 0$. De plus les P_k forment une famille libre car ils sont de degré différent. Donc $(P_0, P_1, P_3, \cdots, P_n)$ est une base de $\ker u$ (on vérifie bien que cette famille contient n vecteurs).
(c) Il est clair que la base canonique $(1, X, X^2, \cdots, X^n)$ est une base orthonormale de E. Pour $n \geq 2$, comme une base de $\ker u$ est $(1, X)$ et comme X^2 est normé et orthogonal à $(1, X)$ alors (X^2) est une base de $\big(\ker u\big)^{\perp}$. $\square$

2. Soit $E = \mathbf{R}^n$, avec $n \in \mathbf{N}^*$, et $< \cdot, \cdot >$ le produit scalaire canonique sur $\mathbf{R}^n$. Pour $F \subset E$, on considère l'application u telle que pour tout $x \in E$, $u(x) = x_F$ avec l'unique décomposition $x = x_F + x_{F^\perp}$ où $x_F \in F$ et $x_{F^\perp} \in F^\perp$. Le but est de déterminer u^*, application adjointe de u.
   (a) Montrer que u est une application linéaire.
   (b) Montrer que $u_O u = u$. On admettra qu'une application linéaire telle que $u_O u = u$ est un projecteur.
   (c) Si $F = E$, définir u et en déduire la matrice de u dans n'importe quelle base de E. En déduire alors u^*.
   (d) Montrer que u admet pour valeurs propres 0 et 1 et déterminer les s.e.v. propres associés à 0 et 1. Montrer que u est diagonalisable dans une base orthonormale. En déduire qu'il existe une matrice P orthogonale et une matrice D diagonale ne contenant que des 0 et des 1 et telles que que la matrice de u dans n'importe quelle base orthonormale s'écrive $P\,D\,{}^tP$. En déduire que $u^* = u$.

Proof. (a) On a $u : E \to E$ et pour tout $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ et pour tout x et y dans E, on peut écrire de façon unique $x = x_F + x_{F^\perp}$, $y = y_F + y_{F^\perp}$, donc $u(\lambda x + \mu y) = \lambda x_F + \mu y_F$ (car $\lambda x_F \in F$ et $\mu y_F \in F$) et ainsi $u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y)$.
(b) Pour tout $x \in E$, $u(u(x)) = u(x_F) = x_F$ donc $u_O u = u$: u est bien un projecteur.
(c) Si $F = E$, alors $u = I_d$ car $u(x) = x$ pour tout $x \in E$. Ainsi dans n'importe quelle base u a pour matrice la matrice identité. Comme la matrice de u^* est la transposée de celle de u (dans une b.o.n.) on en déduit que la matrice de u^* dans une b.o.n. est également la matrice identité et ainsi $u^* = u$.
(d) Pour $x \in F$, $u(x) = x$ donc 1 est valeur propre et F le s.e.v. propre associé. Pour $x \in F^\perp$, $u(x) = 0$ donc 0 est valeur propre et $F^\perp$ le s.e.v. propre associé. Enfin comme $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$, u est bien diagonalisable. Si on choisit une b.o.n. $(e_1, \cdots, e_p)$ de F (on suppose que $\dim F = p$) et une b.o.n. $(e_{p+1}, \cdots, e_n)$ de $F^\perp$, alors $e = (e_1, \cdots, e_n)$ est une b.o.n. de E et u est diagonalisable dans e.
Dans e, la matrice de u est $\mathrm{Mat}(u, e) = D$ avec D une matrice diagonale contenant p 1, puis $n - p$ 0 sur sa diagonale. Mais la matrice de passage de e dans f, une autre b.o.n. de E, est une matrice P orthogonale. Alors $\mathrm{Mat}(u, f) = P\,D\,{}^tP$.
Enfin, la matrice de u^* dans f est ${}^t\mathrm{Mat}(u, f)$ ou encore ${}^t\big(P\,D\,{}^tP\big) = P\,D\,{}^tP = \mathrm{Mat}(u, f)$: la matrice est symétrique donc $u^* = u$. $\square$