Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2008 – 2009

Algèbre S4

Examen final, juin 2009

Examen de 3h00. Tout document ou calculatrice est interdit.

Vous pouvez traiter les questions dans l'ordre que vous désirez. Beaucoup de questions peuvent être résolues même si les précédentes n'ont pas été traitées...

1. **(7.5 pts)** Soit $0 < a \leq \pi$ et soit la fonction 2π-périodique et paire telle que dans $[0, \pi]$, $f(x) = 1$ si $0 \leq x \leq a$ et $f(x) = -1$ si $a < x \leq \pi$.

   (a) Tracer f sur $[-4\pi, 4\pi]$.

   (b) Si $a = \pi$ donner sans calcul le développement en série de Fourier de f.

   (c) Montrer que si $a \in]0, \pi[$, f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[-\pi, \pi]$ en indiquant les points de discontinuité.

   (d) Calculer les coefficients de Fourier de f. En déduire que la série de f est:

   $$S_f(x) = \frac{2a - \pi}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\,a)\,\cos(n\,x)}{n}. \tag{1}$$

   (e) Montrer (en justifiant) que $S_f(a) = 0$ si $a \in]0, \pi[$, et en déduire une expression simple de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\,\theta)}{n}$ pour tout $\theta \in]0, \pi/2[$.

   (f) En choisissant judicieusement a et x dans (1), calculer $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}$.

   (g) Déduire également $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$.

2. **(9 pts)** Soit $E = \mathbf{R}^n$ pour $n \geq 2$ muni du produit scalaire canonique $< \cdot, \cdot >$ et soit $e = (e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de E. Soit $x = (x_1, \cdots, x_n)$ et $y = (y_1, \cdots, y_n)$ deux vecteurs non liés de E et soit $F = \mathrm{Vect}(x_1, x_2)$, le sous-espace de E engendré par x_1 et x_2. On cherche l'expression de la matrice P_F de la projection orthogonale sur F dans e.

   (a) Soit X et Y les vecteurs colonnes associés respectivement à x et y, soit $X = {}^t(x_1, \cdots, x_n)$ et $Y = {}^t(y_1, \cdots, y_n)$. Calculer les produits matriciels $P_F \cdot X$ et $P_F \cdot Y$.

   (b) Pour $u = (u_1, \cdots, u_n)$ et $v = (v_1, \cdots, v_n)$ deux vecteurs de $\mathbf{R}^n$, et avec U et V les vecteurs colonnes associés respectivement à u et v, montrer que $< u, v >= {}^tU \cdot V = {}^tV \cdot U$.

   (c) Soit $Z = (z_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 2}$ la matrice telle que $z_{i1} = x_i$ et $z_{i2} = y_i$ pour tout $i = 1, \cdots, n$. Quelle est la taille de la matrice ${}^tZ \cdot Z$? Exprimer chacune des composantes de cette matrice en terme de produit scalaire et en déduire que $\det({}^tZ \cdot Z) > 0$.

(d) Montrer que $P_F = Z \cdot ({}^tZ \cdot Z)^{-1} \cdot {}^tZ$.

(e) Montrer que la matrice P_F est diagonalisable dans $\mathbf{R}$, et préciser une matrice diagonale associée.

(f) Soit $u = (u_1, \cdots, u_n) \in E$. On définit $d(u, F)$ par $d(u, F) = \inf_{(a,b)\in\mathbf{R}^2} \|u - (a\,x + b\,y)\|$, où $\|\cdot\|$ est la norme associée au produit scalaire $< \cdot, \cdot >$. Montrer qu'il existe un unique vecteur $u_F \in F$ tel que $d(u, F) = \|u_F - u\|$. On note $(\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}) \in \mathbf{R}^2$ les réels tels que $u_F = \widehat{\alpha}\,x + \widehat{\beta}\,y$. Montrer que ${}^t(\widehat{\alpha}, \widehat{\beta})u_F = ({}^tZ \cdot Z)^{-1} \cdot {}^tZ \cdot U$, où U est le vecteur colonne associé à u.

3. **(13.5 pts)** Soit E l'ensemble des fonctions $f : [-1, 1] \to \mathbf{R}$ continues sur $[-1, 1]$. Pour $f, g \in E$, on considère l'application $(f, g) \in E^2 \to \phi(f, g) \in \mathbf{R}$ telle que:

$$\phi(f, g) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx - \Big(\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)dx\Big)\Big(\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} g(x)dx\Big).$$

(a) Montrer que ϕ est une forme bilinéaire symétrique de E.

(b) Soit la fonction $f_1(x) = x$ pour $x \in [-1, 1]$. Montrer que l'application $u : f \in E \to u(f) = \phi(f, f_1)$ est une forme linéaire de E. Montrer que l'ensemble des fonctions paires de E appartiennent au noyau de u. Quelle est la dimension de $\ker u$?

(c) Montrer que la forme quadratique $\Phi(f) = \phi(f, f)$ pour $f \in E$ s'écrit également

$$\Phi(f) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\Big(f(x) - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)dt\Big)^2 dx.$$

En déduire que Φ est une forme quadratique positive. Si $\Phi(f) = 0$ que peut-on dire de f? L'application $(f, g) \in E^2 \to \phi(f, g)$ est-elle un produit scalaire sur E?

(d) Soit $F = \{f : [-1, 1] \to \mathbf{R},\ f(x) = a\,\sin(\pi\,x) + b\,x, (a, b) \in \mathbf{R}^2\}$. Donner une base e de F (montrer que c'est bien une base!) et la dimension de F. Montrer que ϕ est bien un produit scalaire sur F.

(e) Montrer que pour $g \in F$ tel que $g(x) = a\,\sin(\pi\,x) + b\,x$ alors

$$\Phi(g) = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{3}\,b^2 + \frac{2}{\pi}\,ab.$$

Quelle est la matrice de Φ dans e? Déterminer la signature de Φ. Pouvait-on se douter par avance de ce résultat?

(f) En déduire une base orthonormale de F (par rapport au produit scalaire ϕ).