Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2008 – 2009

Algèbre S4

Examen final, juin 2009

Examen de 3h00. Tout document ou calculatrice est interdit.

Vous pouvez traiter les questions dans l'ordre que vous désirez. Beaucoup de questions peuvent être résolues même si les précédentes n'ont pas été traitées...

1. **(7.5 pts)** Soit $0 < a \leq \pi$ et soit la fonction 2π-périodique et paire telle que dans $[0, \pi]$, $f(x) = 1$ si $0 \leq x \leq a$ et $f(x) = -1$ si $a < x \leq \pi$.

   (a) Tracer f sur $[-4\pi, 4\pi]$.

   (b) Si $a = \pi$ donner sans calcul le développement en série de Fourier de f.

   (c) Montrer que si $a \in]0, \pi[$, f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[-\pi, \pi]$ en indiquant les points de discontinuité.

   (d) Calculer les coefficients de Fourier de f. En déduire que la série de f est:
   $$S_f(x) = \frac{2a - \pi}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\, a)\, \cos(n\, x)}{n}. \tag{1}$$

   (e) Montrer (en justifiant) que $S_f(a) = 0$ si $a \in]0, \pi[$, et en déduire une expression simple de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\,\theta)}{n}$ pour tout $\theta \in]0, \pi/2[$.

   (f) En choisissant judicieusement a et x dans (1), calculer $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}$.

   (g) Déduire également $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$.

Proof. (a) f est une fonction en escalier...**(0.5pts)**
(b) Si $a = \pi$ alors $f(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbf{R}$: ceci est déjà un développement en série de Fourier donc $S_f(x) = 1$ **(0.5pts)**.
(c) Pour $x \in]-a, a[$, $f(x) = 1$ (par parité) et pour $x \in [-\pi, -a[\cup]a, \pi]$, $f(x) = -1$. Donc f est clairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-\pi, \pi] \setminus \{-a, a\}$. En a, ou $-a$, f n'est pas continue, mais elle est continue à gauche et à droite. Donc f est bien de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[-\pi, \pi]$ **(0.5pts)**.
(d) Soit $(a_n(f), b_n(f))$ les coefficients de Fourier de f. On a $b_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ car f est paire **(0.5pts)**. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, $a_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \big(\int_0^a \cos(nx) dx + \int_a^\pi \cos(nx) dx \big) = \frac{2}{\pi n} \big(\sin(na) - (\sin(n\pi) - \sin(na) \big) = \frac{4 \sin(na)}{\pi n}$ **(0.5pts)**. Pour $n = 0$, $a_0(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) dx = \frac{2}{\pi} \big(\int_0^a dx - \int_a^\pi dx \big) = \frac{2(2a-\pi)}{\pi}$. Donc $S_f(x) = \frac{2a-\pi}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^\infty \frac{\sin(n\,a)\, \cos(n\,x)}{n}$ car $S_f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^\infty a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx)$.**(0.5pts)**
(e) On peut appliquer le Théorème de Dirichlet à f. Aussi a-t-on pour $x \neq -a$ ou a, $f(x) = S_f(x)$ et $S_f(a) = S_f(-a) = \frac{1}{2}(f(a^+) + f(a^-)) = \frac{1}{2}(1 - 1) = 0$ dès que $a \in]0, \pi[$ **(0.5pts)**.
Or $S_f(a) = \frac{2a-\pi}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^\infty \frac{\sin(n\,a)\, \cos(n\,a)}{n} = \frac{2a-\pi}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^\infty \frac{\sin(2n\,a)}{n}$. Si on pose $\theta = 2a$, on a $2 \sum_{n=1}^\infty \frac{\sin(n\,\theta)}{n} = \pi - \theta$, d'où $\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin(n\,\theta)}{n} = \frac{\pi-\theta}{2}$ pour tout $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ **(1pt)**.
(f) On pose $x = 0$ et $a = \pi/2$. Alors $S_f(0) = f(0) = 1$ et grâce à (1), $S_f(0) = 0 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^\infty \frac{\sin(n\,\frac{\pi}{2})}{n}$. Mais

$\sin(2p\,\frac{\pi}{2}) = 0$ alors que $\sin((2p+1)\,\frac{\pi}{2}) = (-1)^p$. D'où $S_f(0) = \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{2p+1}$. Par suite, $\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{2p+1} = \frac{\pi}{4}$ **(1.5pts)**.
(g) On peut utiliser le Théorème de Bessel car f est bien de continue par morceaux. Aussi a-t-on pour tout $a \in]0,\pi]$, $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f^2(t)dt = 1 = \frac{1}{4}\big(\frac{2(2a-\pi)}{\pi}\big)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\big(\frac{4}{\pi}\,\frac{\sin(n\,a)}{n}\big)^2 = \frac{(2a-\pi)^2}{\pi^2} + \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2(n\,a)}{n^2}$. si on choisit $a = \frac{\pi}{2}$, alors on obtient $1 = \frac{8}{\pi^2}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}$, d'où $\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ **(1.5pts)**. □

2. **(10 pts)** Soit $E = \mathbf{R}^n$ pour $n \geq 2$ muni du produit scalaire canonique $< \cdot,\cdot >$ et soit $e = (e_1,\cdots,e_n)$ la base canonique de E. Soit $x = (x_1,\cdots,x_n)$ et $y = (y_1,\cdots,y_n)$ deux vecteurs non liés de E et soit $F = \mathrm{Vect}(x_1,x_2)$, le sous-espace de E engendré par x_1 et x_2. On cherche l'expression de la matrice P_F de la projection orthogonale sur F dans e.

   (a) Soit X et Y les vecteurs colonnes associés respectivement à x et y, soit $X = {}^t(x_1,\cdots,x_n)$ et $Y = {}^t(y_1,\cdots,y_n)$. Calculer les produits matriciels $P_F \cdot X$ et $P_F \cdot Y$.

   (b) Pour $u = (u_1,\cdots,u_n)$ et $v = (v_1,\cdots,v_n)$ deux vecteurs de $\mathbf{R}^n$, et avec U et V les vecteurs colonnes associés respectivement à u et v, montrer que $< u,v >= {}^tU\cdot V = {}^tV \cdot U$.

   (c) Soit $Z = (z_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq 2}$ la matrice telle que $z_{i1} = x_i$ et $z_{i2} = y_i$ pour tout $i = 1,\cdots,n$. Quelle est la taille de la matrice ${}^tZ\cdot Z$? Exprimer chacune des composantes de cette matrice en terme de produit scalaire et en déduire que $\det({}^tZ\cdot Z) > 0$.

   (d) Montrer que $P_F = Z\cdot({}^tZ\cdot Z)^{-1}\cdot {}^tZ$.

   (e) Montrer que la matrice P_F est diagonalisable dans $\mathbf{R}$, et préciser une matrice diagonale associée.

   (f) Soit $u = (u_1,\cdots,u_n) \in E$. On définit $d(u,F)$ par $d(u,F) = \inf_{(a,b)\in\mathbf{R}^2}\|u-(a\,x+b\,y)\|$, où $\|\cdot\|$ est la norme associée au produit scalaire $< \cdot,\cdot >$. Montrer qu'il existe un unique vecteur $u_F \in F$ tel que $d(u,F) = \|u_F - u\|$. On note $(\widehat{\alpha},\widehat{\beta}) \in \mathbf{R}^2$ les réels tels que $u_F = \widehat{\alpha}\,x + \widehat{\beta}\,y$. Montrer que ${}^t(\widehat{\alpha},\widehat{\beta})u_F = ({}^tZ\cdot Z)^{-1}\cdot{}^tZ\cdot U$, où U est le vecteur colonne associé à u.

Proof. (a) Comme $x \in F$ et $y \in F$, il est clair que $P_F\cdot X = X$ et $P_F\cdot Y = Y$ **(0.5pts)**.
(b) On sait que par définition $< u,v >= \sum_{i=1}^n u_iv_i$. Mais ${}^tU\cdot V = (u_1,\cdots,u_n)\cdot{}^t(v_1,\cdots,v_n) = \sum_{i=1}^n u_iv_i = {}^tV\cdot U$ **(0.5pts)**.
(c) La matrice ${}^tZ\cdot Z$ est de taille $(2,2)$ **(0.5pts)**. De plus ${}^tZ\cdot Z = \begin{pmatrix} {}^tX\cdot X & {}^tX\cdot Y \\ {}^tX\cdot Y & {}^tY\cdot Y\end{pmatrix}$ **(0.5pt)**. On en déduit que $\det({}^tZ\cdot Z) = \|x\|^2\|y\|^2 - < x,y >^2$. D'après le Théorème de Cauchy-Schwartz, $\|x\|^2\|y\|^2 \geq < x,y >^2$, donc $\det({}^tZ\cdot Z) \geq 0$. De plus si on a égalité, cela signifie que x et y sont colinéaires. Or cela n'est pas possible par hypothèses sur x et y. Donc nécessairement $\det({}^tZ\cdot Z) > 0$ **(1.5pt)**.
(d) On a vu que P_F doit vérifier $P_F\cdot X = X$ et $P_F\cdot Y = Y$. Mais ces deux égalités reviennent à écrire que $P_F\cdot Z = Z$, car $Z = (X,Y)$. Mais ceci est vrai avec $P_F = Z\cdot({}^tZ\cdot Z)^{-1}\cdot{}^tZ$ car alors $P_F\cdot Z = Z\cdot({}^tZ\cdot Z)^{-1}\cdot{}^tZ\cdot Z = Z$. Par ailleurs, supposons que $U \in F^{\perp}$. On sait par définition que le projeté orthogonal sur F de U est le vecteur nul, ce qui se traduit par le fait que $P_F\cdot U = 0$. Mais ${}^tZ\cdot U = {}^t(< X,U >,< Y,U >)$ donc ${}^tZ\cdot U = 0$ car $< X,U >= 0$ et $< Y,U >$ du fait que U est orthogonal à X et Y. Ainsi on vérifie bien que $P_F\cdot U = 0$. De ceci, comme $\mathrm{Vect}(X,Y,F^{\perp}) = E$, on a totalement décrit P_F avec ce qui précède et on a bien $P_F = Z\cdot({}^tZ\cdot Z)^{-1}\cdot{}^tZ$ **(3pts)**.
(e) P_F est une matrice symétrique car ${}^tP_F = P_F$. Donc P_F est diagonalisable dans R car toute matrice symétrique est diagonalisable dans $\mathbf{R}$ **(0.5pts)**. Comme $P_F\cdot X = X$ et $P_F\cdot Y = Y$, on en déduit que 1 est valeur propre et le sous-espace propre associé à 1 est de dimension ≥ 2 (car X et Y ne sont pas liés). De plus, pour tout $U \in F^{\perp}$ on a $P_F\cdot U = 0$, donc 0 est une valeur propre et $F^{\perp}$ est inclus dans son sous-espace propre associé. Mais $\dim(F^{\perp}) = n-2$, donc $F^{\perp}$ est le sous-espace propre associé à 0 et F est le sous-espace propre associé à 1. Une matrice diagonale associée à la diagonalisation de P_F contient donc $n-2$ fois 0 et 2 fois 1 **(1.5pts)**.
(f) u_F existe car F est un sous-espace vectoriel de dimension finie et on sait que $u_F = P_F\cdot U$. On a U_F le vecteur colonne associé à u_F qui vérifie $U_F = \widehat{\alpha}\,X + \widehat{\beta}\,Y = Z\cdot{}^t(\widehat{\alpha},\widehat{\beta})$. Or $U_F = P_F\cdot U$. Donc $Z\cdot{}^t(\widehat{\alpha},\widehat{\beta}) = Z\cdot({}^tZ\cdot Z)^{-1}\cdot{}^tZ\cdot U$. On peut donc multiplier à gauche par ${}^tZ$ et on a donc ${}^tZ\cdot Z\cdot{}^t(\widehat{\alpha},\widehat{\beta}) = {}^tZ\cdot U$ et comme ${}^tZ\cdot Z$ est inversible, on a bien ${}^t(\widehat{\alpha},\widehat{\beta}) = ({}^tZ\cdot Z)^{-1}\cdot{}^tZ\cdot U$ **(0.5pts)**. □

3. **(13.5 pts)** Soit E l'ensemble des fonctions $f : [-1,1] \to \mathbf{R}$ continues sur $[-1,1]$. Pour $f,g \in E$, on considère l'application $(f,g) \in E^2 \to \phi(f,g) \in \mathbf{R}$ telle que:

$$\phi(f,g) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx - \Big(\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)dx\Big)\Big(\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} g(x)dx\Big).$$

(a) Montrer que ϕ est une forme bilinéaire symétrique de E.

(b) Soit la fonction $f_1(x) = x$ pour $x \in [-1,1]$. Montrer que l'application $u : f \in E \to u(f) = \phi(f, f_1)$ est une forme linéaire de E. Montrer que l'ensemble des fonctions paires de E appartiennent au noyau de u. Quelle est la dimension de $\ker u$?

(c) Montrer que la forme quadratique $\Phi(f) = \phi(f,f)$ pour $f \in E$ s'écrit également

$$\Phi(f) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\Big(f(x) - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)dt\Big)^2 dx.$$

En déduire que Φ est une forme quadratique positive. Si $\Phi(f) = 0$ que peut-on dire de f? L'application $(f,g) \in E^2 \to \phi(f,g)$ est-elle un produit scalaire sur E?

(d) Soit $F = \{f : [-1,1] \to \mathbf{R},\ f(x) = a\,\sin(\pi\,x) + b\,x, (a,b) \in \mathbf{R}^2\}$. Donner une base e de F (montrer que c'est bien une base!) et la dimension de F. Montrer que ϕ est bien un produit scalaire sur F.

(e) Montrer que pour $g \in F$ tel que $g(x) = a\,\sin(\pi\,x) + b\,x$ alors

$$\Phi(g) = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{3}\,b^2 + \frac{2}{\pi}\,ab.$$

Quelle est la matrice de Φ dans e? Déterminer la signature de Φ. Pouvait-on se douter par avance de ce résultat?

(f) En déduire une base orthonormale de F (par rapport au produit scalaire ϕ).

Proof. (a) On a $\phi(f,g) \in \mathbf{R}$ qui existe toujours. De plus, du fait de la commutativité de la multiplication des réels, $\phi(f,g) = \phi(g,f)$. Enfin, pour $\lambda,\mu \in \mathbf{R}$, f,g et h dans E, alors $\phi(f,\lambda\,g+\mu\,h) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)(\lambda\,g(x)+\mu\,h(x))dx - \big(\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)dx\big)\big(\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\lambda\,g(x)+\mu\,h(x)dx\big) = \frac{\lambda}{2}\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx + \frac{\mu}{2}\int_{-1}^{1} f(x)h(x)dx - \big(\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)dx\big)\big(\frac{\lambda}{2}\int_{-1}^{1} g(x)dx + \frac{\mu}{2}\int_{-1}^{1} h(x)dx\big) = \lambda\phi(f,g) + \mu\phi(f,h)$: ϕ est bien une forme bilinéaire symétrique **(1pt)**.
(b) On a $u : f \in E \to \phi(f,f_1) \in \mathbf{R}$ qui existe pour tout f car $f_1 \in E$. De plus, pour $(f,g) \in E^2$, $\lambda,\mu_i n\mathbf{R}$, $u(\lambda\,f + \mu\,g) = \phi(f_1,\lambda\,f+\mu\,g) = \lambda\phi(f_1,f) + \mu\phi(f_1,g)$ car ϕ est bilinéaire et donc $u(\lambda\,f+\mu\,g) = \lambda\,u(f) +_m u\,u(g)$: l'application u est bien une forme linéaire sur E **(1pt)**.
Si f est une fonction paire, $f \cdot f_1$ est une fonction impaire car f_1 est impaire. Donc $\int_{-1}^{1} f(x)f_1(x)dx = 0$ et $\int_{-1}^{1} f_1(x)dx = 0$. On a donc bien $u(f) = \phi(f,f_1) = 0$ **(0.5pts)**.
L'ensemble de toutes les fonctions paires appartenant à E est de dimension infinie (en effet, cet ensemble contient toutes les fonctions $x \to x^{2n}$ avec $n \in \mathbf{N}$, fonctions qui sont non liés car ce sont des polynômes de degrés différents). Donc $\dim(\ker u) = +\infty$ **(1pt)**.
(c) On a $\Phi(f) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f^2(x)dx - \big(\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)dx\big)^2$. Mais $\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\big(f(x) - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)dt\big)^2 dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f^2(x) - 2f(x)\,\frac{1}{2}\big(\int_{-1}^{1} f(t)dt\big) + \big(\int_{-1}^{1} f(t)dt\big)^2 dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f^2(x)dx - 2\big(\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)dt\big)^2 + \big(\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)dt\big)^2 = \Phi(f)$ **(1.5pts)**.
Il est bien clair que Φ s'écrit comme l'intégrale d'une fonction positive, donc Φ est une forme quadratique positive **(0.5pts)**.
On sait que si g est une fonction positive et continue et si $\int_{-1}^{1} g(t)dt = 0$ alors $g = 0$. En appliquant ceci ici, on obtient que si $\Phi(f) = 0$ alors $f(x) - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)dt = 0$ pour tout $x \in [-1,1]$, soit $f = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)dt$: f est donc une fonction constante **(1pt)**.
Comme $\phi(f,f) = 0$ n'entraîne pas que $f = 0$ (puisque l'on vient de voir que f peut alors être une fonction constante), alors la quatrième propriété satisfaite par un produit scalaire n'est pas vérifiée **(1pt)**.
(d) On doit montrer que $x \to \sin(\pi\,x)$ et $x \to x$ sont deux vecteurs libres de E. Si $\alpha\,\sin(\pi\,x) + \beta\,x = 0$ pour tout $x \in [-1,1]$, alors, en dérivant 2 fois, on en arrive à $-\alpha\pi^2\sin(\pi\,x) = 0$ pour tout $x \in [-1,1]$, ce qui implique que $\alpha = 0$ et par conséquent $\beta = 0$ également: $x \to \sin(\pi\,x)$ et $x \to x$ forme une famille libre et donc une base de F **(1pt)**. Aussi F est de dimension 2 **(0.5pts)**.
Comme les fonctions constantes n'appartiennent pas à F la quatrième propriété du produit scalaire est maintenant vérifiée par ϕ sur F: ϕ est un produit scalaire sur F **(0.5pts)**.
(e) $\Phi(g) = \int_0^1 (a\,\sin(\pi\,x) + b\,x)^2 dx = \int_0^1 (a^2\,\sin^2(\pi\,x) + b^2\,x^2 + 2ab\,x\sin(\pi\,x))dx = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{3} + 2ab\frac{1}{\pi}$ **(1pt)**.
La matrice de Φ dans e est $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\pi} \\ \frac{1}{\pi} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ **(0.5pts)**. On a $\Phi(g) = \frac{1}{2}\big(a + \frac{2}{\pi}b)^2 + (\frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2})b^2\big)$, et comme $\frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2} > 0$ alors $Sign(\Phi) = (2,0)$ **(0.5pts)**. On pouvait se douter de ce résultat car Φ est définie positive sur F, donc sa signature était nécessairement $(2,0)$ car la dimension de F est 2 **(0.5pts)**.
(f) On utilise le procédé d'orthonormalisation de Grahm-Schmidt. Soit $(e_1,e_2) = (x,\sin(\pi\,x))$. On peut écrire que

$e_1'(x) = x/\sqrt{\Phi(e_1)}$: comme $\Phi(e_1) = \frac{1}{3}$, on a $e_1'(x) = \sqrt{3}\,x$. Ensuite, $e_2'(x) = (e_2 - \phi(e_1', e_2)e_1')/\sqrt{\Phi(e_2 - \phi(e_1', e_2)e_1')}$. On a $\phi(e_1', e_2) = \frac{\sqrt{3}}{2}\int_{-1}^{1} x \sin(\pi x)dx - \Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\int_{-1}^{1} x dx\Big)\Big(\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\sin(\pi x)dx\Big)$ soit $\phi(e_1', e_2) = \sqrt{3}\Big(\Big[-x\,\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)\Big]_0^1 + \frac{1}{\pi}\int_0^1 \cos(\pi x)dx\Big) = \sqrt{3}\Big(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi^2}\Big[\sin(\pi x)\Big]_0^1\Big) = \frac{\sqrt{3}}{\pi}$. On en déduit que $e_2 - \phi(e_1', e_2)e_1' = \sin(\pi x) - \frac{3}{\pi}x$. De plus $\Phi(\sin(\pi x) - \frac{3}{\pi}x) = \frac{1}{2} - \frac{3}{\pi^2}$. Ainsi $e_2'(x) = \Big(\sin(\pi x) - \frac{3}{\pi}x\Big)/\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{3}{\pi^2}}$ **(1.5pts)**.

$\square$