Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2008 – 2009

Algèbre S4

Examen de septembre 2009

Examen de 3h00. Tout document ou calculatrice est interdit.

Vous pouvez traiter les questions dans l'ordre que vous désirez. Beaucoup de questions peuvent être résolues même si les précédentes n'ont pas été traitées...

1. **(9 pts)** Soit E l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, nulle en 0.
   (a) Montrer que E est bien un espace vectoriel. Montrer que $\dim E = \infty$.
   (b) Soit l'application $< \cdot, \cdot >$ telle que pour f et g dans E, $< f, g >= \int_0^1 f'(t)g'(t)dt$. Vérifier que $< \cdot, \cdot >$ est bien un produit scalaire sur E.
   (c) Soit $u : E \to \mathbf{R}$ telle que pour $f \in E$, $u(f) = f(1)$. Montrer que u est une forme linéaire sur E.
   (d) On note $H = \ker u$. Montrer que pour toute fonction $f \in E$, la fonction $\tilde{f}$ définie par $\tilde{f}(x) = f(x) - x\,f(1)$ pour tout $x \in [0,1]$ appartient à H. En déduire la dimension de H.
   (e) Soit g_0 la fonction telle que $g_0(x) = x$ pour tout $x \in [0,1]$. Montrer que pour tout $f \in E$, $u(f) =< f, g_0 >$. En déduire un sous-espace vectoriel G de dimension 1 tel que $G \subset H^\perp$. A-t-on $G = H^\perp$? (on pourra utiliser la question (d)).

2. **(7.5 pts)** Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$ deux nombres réels fixés et soit f la fonction 2π-périodique telle que pour $x \in [-\pi, 0[$, $f(x) = \beta$ et pour $x \in [0, \pi[$, $f(x) = \alpha$.
   (a) Tracer f sur $[-4\pi, 4\pi]$.
   (b) Suivant les valeurs de α et β, déterminer sur quel ensemble inclus dans $[-\pi, \pi[$, f est continue, sur quel ensemble inclus dans $[-\pi, \pi[$, f est de classe $\mathcal{C}^1$.
   (c) Si $\alpha = \beta$ donner sans calcul le développement en série de Fourier de f.
   (d) Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$, calculer les coefficients de Fourier de f puis montrer que,
   $$f(x) = \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{2(\alpha-\beta)}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1} \quad \text{pour} \quad x \in]-\pi, 0[\cup]0, \pi[.$$
   (e) En déduire pour tout $x \in [-\pi, \pi]$, la valeur explicite de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1}$.
   (f) Déduire également (en justifiant) $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$, puis, en utilisant le fait que $\dfrac{1}{(2p)^2} = \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{p^2}$, en déduire $\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2}$.

3. **(10 pts)** Soit E l'ensemble des matrices carrés de taille n tel que si $M = (m_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in E$ alors il existe une famille $(u_0, \cdots, u_{n-1}) \in \mathbf{R}^N$ vérifiant $m_{ij} = u_{|j-i|}$ pour tout i, j (on dit alors que M est une matrice de Toepliz).

   (a) Vérifier que la matrice identité est bien une matrice de E.

   (b) Montrer que E est un espace vectoriel. Donner une base de E (on pourra penser à des matrices avec différents types de diagonales...) et en déduire que $\dim E = n$.

   (c) Montrer que si $M \in E$, alors M est une matrice symétrique. La réciproque est-elle vraie?

   (d) Montrer que si $M \in E$ alors M est diagonalisable dans $\mathbf{R}$.

   (e) On suppose que $n = 2$. Soit $M \in E$. Diagonaliser M en fonction des réels u_0 et u_1 associés à M (préciser la matrice diagonale et la matrice de passage P). Soit Φ la forme quadratique sur $\mathbf{R}^2$ associée à M. Déterminer la signature de M suivant des relations vérifiées par u_0 et u_1. A quelle condition Φ est une norme associée à un produit scalaire sur $\mathbf{R}^2$?