Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année $2008 - 2009$

Algèbre S4

Correction de l'examen de septembre 2009

Examen de 3h00. Tout document ou calculatrice est interdit.

Vous pouvez traiter les questions dans l'ordre que vous désirez. Beaucoup de questions peuvent être résolues même si les précédentes n'ont pas été traitées...

1. **(9 pts)** Soit E l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, nulle en 0.
   (a) Montrer que E est bien un espace vectoriel. Montrer que $\dim E = \infty$.
   (b) Soit l'application $< \cdot, \cdot >$ telle que pour f et g dans E, $< f, g >= \int_0^1 f'(t)g'(t)dt$. Vérifier que $< \cdot, \cdot >$ est bien un produit scalaire sur E.
   (c) Soit $u : E \to \mathbf{R}$ telle que pour $f \in E$, $u(f) = f(1)$. Montrer que u est une forme linéaire sur E.
   (d) On note $H = \ker u$. Montrer que pour toute fonction $f \in E$, la fonction $\tilde{f}$ définie par $\tilde{f}(x) = f(x) - x\, f(1)$ pour tout $x \in [0,1]$ appartient à H. En déduire la dimension de H.
   (e) Soit g_0 la fonction telle que $g_0(x) = x$ pour tout $x \in [0,1]$. Montrer que pour tout $f \in E$, $u(f) =< f, g_0 >$. En déduire un sous-espace vectoriel G de dimension 1 tel que $G \subset H^\perp$. A-t-on $G = H^\perp$? (on pourra utiliser la question (d)).

Proof. (a) On montre que E est un sev de C l'ev des fonctions de $[0,1]$ dans $[0,1]$. En effet la fonction nulle est dans E. De plus si f_1 et f_2 sont dans E, si λ_1 et λ_2 sont dans $\mathbf{R}$, alors $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et $(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(0) = 0 + 0 = 0$ car $f_1(0) = f_2(0) = 0$. **(0.5pts)**
La famille des fonctions $(x^k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ est une famille libre de taille infinie et appartient à E: on en déduit donc que E est de dimension infinie. **(1pt)**
(b) On doit vérifier les 4 propriétés du produit scalaire. Tout d'abord, de par les propriétés de linéarité de l'intégrale et de la dérivation, il est clair que $< f, \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 >= \int_0^1 f'(t)(\lambda_1 g_1'(t) + \lambda_2 g_2'(t))dt = \lambda_1 < f, g_1 > +\lambda_2 < f, g_2 >$. Ensuite, il est évident que $< f, g >=< g, f >$. Ensuite, $< f, f >= \int_0^1 (f'(t))^2 dt \geq 0$. Enfin, si $< f, f >= 0$ alors comme f' est continue, on sait qu'alors $f'(x) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$ et ainsi $f(x) = C$ pour tout $x \in [0,1]$ avec $C \in \mathbf{R}$. Or comme $f \in E$, $f(0) = 0$ donc $C = 0$. Ainsi $f = 0$. On a donc bien un produit scalaire. **(2pts)**
(c) Pour $f_1, f_2 \in E$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in R$, on a bien $u(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(1) = \lambda_1 f_1(1) + \lambda_2 f_2(1) = \lambda_1 u(f_1) + \lambda_2 u(f_2) \in R$: u est bien une forme linéaire sur E. **(0.5pts)**.
(d) Pour $h \in H$, on a donc $h(1) = 0$. Mais si $f \in E$ est quelconque, alors $\tilde{f} \in E$ (car $\tilde{f}(1)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ du fait que f est dans E et que la fonction x est de classe $\mathcal{C}^1$ et également car $\tilde{f}(0) = f(0) - f(1) * 0 = 0$). On a également $\tilde{f}(1) = f(1) - f(1) = 0$: $\tilde{f} \in H$. **(1pt)**.
De ceci on déduit par exemple que la famille de fonction $(x^n - x)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est une famille libre de H: H est de dimension infinie. **(1pt)**.
(e) On a, par intégration par parties, $< f, g_0 >= \int_0^1 1\, f'(x)dx = [f(x)]_0^1 = f(1) - f(0) = f(1) = u(f)$ car $f \in E$. **(0.5pts)**.
Comme $u(f) =< f, g_0 >$ on en déduit que $H = \{g_0\}^\perp$ et ainsi il est clair que pour tout $f \in H$ alors $< f, g_0 >= 0$: donc $g_0 \in H^\perp$ et la droite vectorielle portée par g_0 est un sev inclus dans $H^\perp$. **(1pt)**.
D'après la décomposition de la question précédente, on sait que pour tout $f \in E$, $f(x) = f(x) - f(1)x + f(1)x$ donc $E = \ker H \oplus \mathrm{vec}(g_0)$. On peut donc en déduire que $\mathrm{vec}(g_0) = H^\perp$. **(1.5pts)**. □

2. **(7.5 pts)** Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$ deux nombres réels fixés et soit f la fonction 2π-périodique telle que pour $x \in [-\pi, 0[$, $f(x) = \beta$ et pour $x \in [0, \pi[$, $f(x) = \alpha$.

   (a) Tracer f sur $[-4\pi, 4\pi]$.

   (b) Suivant les valeurs de α et β, déterminer sur quel ensemble inclus dans $[-\pi, \pi[$, f est continue, sur quel ensemble inclus dans $[-\pi, \pi[$, f est de classe $\mathcal{C}^1$.

   (c) Si $\alpha = \beta$ donner sans calcul le développement en série de Fourier de f.

   (d) Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$, calculer les coefficients de Fourier de f puis montrer que,

$$f(x) = \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{2(\alpha-\beta)}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1} \quad \text{pour} \quad x \in]-\pi, 0[\cup]0, \pi[.$$

   (e) En déduire pour tout $x \in [-\pi, \pi]$, la valeur explicite de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1}$.

   (f) Déduire également (en justifiant) $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$, puis, en utilisant le fait que $\dfrac{1}{(2p)^2} = \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{p^2}$, en déduire $\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2}$.

Proof. (a) f est une fonction en escalier...**(0.5pts)**
(b) Si $\alpha = \beta$ alors f est continue et même $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$. Sinon, f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[-\pi, \pi[$, les points de discontinuité étant en 0 modulo π. **(1pt)**
(c) Si $\alpha = \beta$, alors $f(x) = \alpha$ pour tout $x \in \mathbf{R}$, et une fonction constante est déjà développée en série de Fourier (son développement étant elle-même). **(1pt)**.
(d) Soit $(a_n(f), b_n(f))$ les coefficients de Fourier de f. On a pour $n \in \mathbf{N}^*$, $a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^0 \beta\cos(nx)dx + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \alpha\cos(nx)dx = 0$ et $b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^0 \beta\sin(nx)dx + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \alpha\sin(nx)dx = \frac{1}{n\pi}\big(\beta(1-(-1)^n) + \alpha((-1)^n - 1)\big)$. **(1pt)**.
Pour $n = 0$, $a_0(f) = \frac{1}{\pi}(\pi\beta + \pi\alpha) = (\alpha+\beta)$. **(0.5pts)**
On peut appliquer le Théorème de Dirichlet à f. Aussi a-t-on pour $x \in]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$, $f(x) = S_f(x)$ car la fonction f est alors continue et donc: $f(x) = \frac{\alpha+\beta}{2} + \sum_{n=1}^\infty b_n(f)\sin(nx)$ soit le développement proposé, sachant que $1-(-1)^n$ est nul quand n est pair et $= 2$ quand n est impair. **(1pt)**.
(e) De la question précédente, on déduit que pour $x \in]0, \pi[$, $\alpha = \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{2(\alpha-\beta)}{\pi}\sum_{n=0}^\infty \frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1}$ soit $\sum_{n=0}^\infty \frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$. De même pour $x \in]-\pi, 0[$, $\beta = \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{2(\alpha-\beta)}{\pi}\sum_{n=0}^\infty \frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1}$ soit $\sum_{n=0}^\infty \frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1} = -\frac{\pi}{4}$. **(1pt)**.
(f) On peut utiliser le Théorème de Bessel car f est bien de continue par morceaux. Aussi a-t-on, $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi f^2(t)dt = \frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2) = \frac{1}{4}\big(\alpha+\beta\big)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^\infty \big(\frac{2}{\pi}(\alpha-\beta)\frac{1}{2n+1}\big)^2$ soit $\frac{1}{4}(\alpha-\beta)^2 = \frac{2}{\pi^2}(\alpha-\beta)^2\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(2n+1)^2}$ et donc $\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. **(1.5pts)**. □

3. **(10 pts)** Soit E l'ensemble des matrices carrés de taille n tel que si $M = (m_{ij})_{1\le i,j\le n} \in E$ alors il existe une famille $(u_0, \cdots, u_{n-1}) \in \mathbf{R}^N$ vérifiant $m_{ij} = u_{|j-i|}$ pour tout i, j (on dit alors que M est une matrice de Toepliz).

   (a) Vérifier que la matrice identité est bien une matrice de E.

   (b) Montrer que E est un espace vectoriel. Donner une base de E (on pourra penser à des matrices avec différents types de diagonales...) et en déduire que $\dim E = n$.

   (c) Montrer que si $M \in E$, alors M est une matrice symétrique. La réciproque est-elle vraie?

   (d) Montrer que si $M \in E$ alors M est diagonalisable dans $\mathbf{R}$.

   (e) On suppose que $n = 2$. Soit $M \in E$. Diagonaliser M en fonction des réels u_0 et u_1 associés à M (préciser la matrice diagonale et la matrice de passage P). Soit Φ la forme quadratique sur $\mathbf{R}^2$ associée à M. Déterminer la signature de M suivant des relations vérifiées par u_0 et u_1. A quelle condition Φ est une norme associée à un produit scalaire sur $\mathbf{R}^2$?

Proof. (a) Pour la matrice identité, il suffit de prendre $u_0 = 1$ et $u_i = 0$ pour $1 \leq i \leq n-1$.**(0.5pts)**
(b) On montre que E est un sev de l'ensemble des matrices carrés de taille n qui est un ev. La mtrice nulle est trivialement dans E (il suffit de prendre $u_i = 0$ pour tout i). Si M_1 et M_2 sont deux matrices de E, et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$, alors il existe $u^{(1)}$ et $u^{(2)}$ telles que $M_1 = (u^{(1)}_{|j-i|})_{ij}$ et $M_2 = (u^{(2)}_{|j-i|})_{ij}$. Donc $\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 = (\lambda_1 u^{(1)}_{|j-i|} + \lambda_2 u^{(2)}_{|j-i|})_{ij}$. Si on note $v = \lambda_1 u^{(1)} + \lambda_2 u^{(2)}$ on a bien $\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 = (v_{|j-i|})_{ij}$ donc $\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 \in E$. Donc E est bien un sev donc un ev. **(1.5pts)**
Pour $k \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$, on note $M^k = (m^{(k)}_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice carrée de taille n telle que $m^{(k)}_{ij} = 1$ si $|j-i| = k$ et $m^{(k)}_{ij} = 0$ sinon. Il est clair que si $M \in E$ avec $M = (m_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in E$ telle que $m_{ij} = u_{|j-i|}$ alors $M = u_0 M^{(0)} + u_1 M^{(1)} + \cdots + u_{n-1} M^{(n-1)}$ donc la famille $(M^k)_{0 \leq k \leq n-1}$ est une famille génératrice de E. De plus les $(M^k)_{0 \leq k \leq n-1}$ forme une famille libre car ces différentes matrices n'ont aucun nombre non nul en commun. Donc $(M^k)_{0 \leq k \leq n-1}$ est une base de E. **(2pts)**
De ceci on en déduit que $\dim E = n$. **(0.5pts)**
(c) Il est clair que $u_{|j-i|} = u_{|i-j|}$ donc si $M \in E$ alors M est symétrique. **(0.5pts)**.
La réciproque est fausse: par exemple pour $n = 2$, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ est symétrique mais pas dans E. **(1pt)**
(d) Si $M \in E$, M est diagonalisable dans $\mathbf{R}$ comme matrice symétrique. **(0.5pts)**
(e) Si $n = 2$, $M = \begin{pmatrix} u_0 & u_1 \\ u_1 & u_0 \end{pmatrix}$. Le polynôme caractéristique de M est donc $\chi_M(\lambda) = (u_0 - \lambda)^2 - u_1^2 = (\lambda - (u_0 + u1))(\lambda - (u_0 - u1))$ donc M a pour valeurs propres $u_0 + u_1$ et $u_0 - u_1$: ces deux valeurs propres sont distinctes dès que $u_1 \neq 0$. Si $u_1 = 0$ alors M est diagonalisable car déjà diagonale! Si $u_1 \neq 0$, alors le sev propre associé à $u_0 + u_1$ est $x = y$ de base $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ et le sev propre associé à $u_0 - u_1$ est $x = y$ de base $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$. On ainsi obtenu une base orthonormale pour diagonaliser M, et $M = P\, D\, {}^tP$ avec $D = \begin{pmatrix} u_0 + u_1 & 0 \\ 0 & u_0 - u_1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.
(2pts)
Comme M est la matrice de Φ, on en déduit que la signature de Φ est $(2,0)$ si $u_0 > |u_1|$, $(1,1)$ si $-|u_1| < u_0 < |u_1|$, $(0,2)$ si $u_0 < -|u_1|$, $(1,0)$ ou $(0,1)$ si $u_0 = \pm u_1$. **(1pt)**
Pour que Φ soitt une norme associée à un produit scalaire sur $\mathbf{R}^2$, il faut donc que $u_0 > |u_1|$. **(0.5pts)** $\square$