Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

LICENCE M.A.S.S.

Feuilles de TD du cours d'Algèbre S4

JEAN-MARC BARDET (UNIVERSITÉ PARIS 1, SAMM)

U.F.R. 27 et Equipe SAMM (Statistique, Analyse et Modélisation Multidisiplinaire)
Université Panthéon-Sorbonne, 90 rue de Tolbiac, 75013 Paris.

Feuille n^o 1:

Espaces euclidiens et préhilbertiens

(1) **(**)** Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$; déterminer parmi les applications $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ suivantes, celles qui correspondent à un produit scalaire sur E.
  (a) $E = \mathbb{R}$ et $\langle x, x'\rangle = x^2 + 2xx'$.
  (b) $E = \mathbb{R}^2$ et $\langle (x, y),(x', y')\rangle = 3xx' + 2xy' - 2yx' + yy'$.
  (c) $E = \mathbb{R}^2$ et $\langle (x, y),(x', y')\rangle = 3xx' + 2xy' + 2yx' + yy'$.
  (d) $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\sum_{k=0}^{1} P(k)Q(k)$.
  (e) $E = \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $[a, b]$ $(a < b)$ à valeurs réelles et pour $f,\, g \in E$, $\langle f, g\rangle = \int_a^b \big(f^2(t) + g^2(t) - (f(t) + g(t))^2\big)dt$.

(2) **(*)** Soit E l'ensemble des fonctions définies sur $[0, 1]$. Montrer que l'application $f,\, g \in E \mapsto \sup_{x\in[0,1]}(|f(x)| + |g(x)|)^2$ n'est pas un produit scalaire.

(3) **(**)** Soit E l'ensemble des suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\sum_{n=0}^{\infty} u_n^2 < \infty$. Montrer que E est bien un espace vectoriel. Montrer que pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $2|xy| \le x^2+y^2$. En déduire que l'application $(u_n)_n,(v_n)_n \in E \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_nv_n$ existe bien, puis que c'est un produit scalaire sur E.

(4) **(*)** Soit l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ des matrices de taille (p, q) à coefficients réels. Montrer que pour toutes matrices $M = (m_{ij})_{1\le i\le p,\, 1\le j\le q}$ et $M' = (m'_{ij})_{1\le i\le p,\, 1\le j\le q}$ de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, l'application $< M, M' >= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} 2m_{ij}m'_{ij}$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.

(5) **(**)** Après avoir introduit un produit scalaire adéquat, montrer les inégalités suivantes :
  (a) pour $x, x', y, y' \in \mathbb{R}^2$,
$$|xx' - 2xy' - 2yx' + 6yy'| \le \sqrt{x^2 - 4xy + 6y^2}\sqrt{(x')^2 - 4x'y' + 6(y')^2}$$
  (b) Pour $f, g \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$,
$$\int_0^1 f(t)g(t)dt \le \left(\int_0^1 f^2(t)dt\right)^{\frac12}\left(\int_0^1 g^2(t)dt\right)^{\frac12}.$$
  (c) Pour $P \in \mathbb{R}[X]$,
$$\left(\int_{-1}^1 t\,P(t)dt\right)^2 \le \frac{2}{3}\int_{-1}^1 (P(t))^2dt.$$

(6) **(**)** Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel constitué des matrice carrées de taille n à coefficients réels. Montrer que l'application $< M, N >:= \mathrm{Tr}({}^tM\,N)$ est un produit scalaire sur E. Déterminer $D_n(\mathbb{R})^{\perp}$ où $D_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices diagonales de E.

(7) **(**)** Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ muni du produit scalaire défini par
$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$
  (a) Déterminer une base orthonormée du sous-espace vectoriel F de E engendré par f_1, f_2 définies par $f_1(x) = 1,\ f_2(x) = x \qquad x \in [0, 1]$.

  (b) Déterminer la projection orthogonale sur F de $f : x \mapsto \ln(1 + x)$, $x \in [0, 1]$.

(8) **(**)** Soit $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[-1, 1]$.
  (a) Montrer que l'on définit un produit scalaire sur E en posant $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)g(x)dx$.

(b) On considère le sous-espace $F = \mathbb{R}_2[X]$ de E. Trouver une base orthogonale de F (polynômes de Tchébycheff de première espèce).
(c) Quelle est la meilleure approximation de $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.

(9) **(**)** Soit $E = \mathbb{R}^3$ et pour $x = (x_1, x_2, x_3) \in E$ soit l'application

$$N(x) = \left(4x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_1x_2\right)^{1/2}.$$

(a) Montrer que $N(x)$ existe bien pour tout $x \in E$.
(b) Montrer que $N(x)$ est une norme associée à un produit scalaire que l'on précisera.
(c) Déterminer une base orthonormale de E pour ce produit scalaire.
(d) Soit $F = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in E,\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}$. Montrer que F est un s.e.v. de E, puis déterminer une base orthonormale (pour le produit scalaire précédent) de F et déterminer $F^\perp$.

(10) **(**)** Calculer le minimum sur $\mathbb{R}^3$ de

$$f(a,b,c) = \int_0^{+\infty} (x^3 + ax^2 + bx + c)^2 e^{-2x} dx.$$

Indication : On penser à une projection après avoir introduit le produit scalaire sur $\mathbb{R}_3[X]$, $\langle P, Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-2t}dt$.

(11) **(**)** Déterminer $\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_0^\pi (a\sin(t) + b\cos(t) + c - t)^2 \mathrm{d}t$.

(12) **(**)** On considère $E = \mathbb{R}^4$ canonique muni du produit scalaire euclidien usuel et $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ sa base canonique. Soit $a = (0, 1, 2, 3)$ et $F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in E,\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \text{ et } x_1 = x_2 + x_3\}$.
(a) Montrer que F est un s.e.v. de E dont on précisera une base dans e et la dimension.
(b) Déterminer une base orthonormale de F. En déduire pour $x \in E$, $p_F(x)$ la projection orthogonale de x sur F.
(c) Déterminer $F^\perp$. Calculer de deux manières différentes pour $x \in E$, $p_{F^\perp}(x)$ la projection orthogonale de x sur $F^\perp$.
(d) Calculer $d(a, F)$.

(13) **(***)** Soit $(E, \langle\rangle)$ un espace euclidien.
(a) Soit H un s.e.v. de E et $p_H(x)$ la projection orthogonale de x sur H. Montrer que pour tout $x \in E$, $\|p_H(x)\| \leq \|x\|$.
(b) Soit F et G deux s.e.v. de E tels que pour tout $(x,y) \in F \times G$, $\|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle \geq 0$. Montrer que F et G sont orthogonaux.
(c) Soit p un projecteur linéaire de E (non nécessairement orthogonal) sur J un s.e.v. de E. On suppose que pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$. Montrer que p est un projecteur orthogonal.

Feuille n^o 2:

Une application en analyse: les séries de Fourier

(1) **(*)** Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer le développement en série de Fourier de $f(x) = \cos^n(x)$.

(2) **(*)** Soit f une fonction 2π-périodique, continue par morceaux. Montrer que si $f(x+\pi) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, les coefficients de Fourier d'indice pair sont nuls. Montrer que si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(\pi - x) = f(x)$, les coefficients b_{2n} et a_{2n-1} sont nuls pour $n \geq 1$.

(3) **(*)** Soit la fonction 2π-périodique f définie par $f(x) = x$ si $|x| < \pi$ et $f(\pi) = 0$.
 (a) Déterminer la série de Fourier de f. Cette série de Fourier converge-t'elle vers f ? En quel sens ?
 (b) En déduire les sommes des séries $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$, $\sum \frac{1}{n^2}$ puis $\sum \frac{1}{(2n+1)^2}$.

(4) **(*)** Soit f la fonction impaire, de période 2π, égale à 1 sur $]0, \pi[$. Tracer f sur $[-4\pi, 4\pi]$. Montrer que f admet un développement en série de Fourier et le préciser? Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$. En utilisant le Théorème de Bessel, quelle autre somme de série numérique peut-on facilement obtenir à partir de ce développement en série de Fourier?

(5) **(**)** Soit f la fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ définie sur $]-\pi, 0]$ par $f(x) = 0$ et par $f(x) = 1$ sur $]0, \pi]$. Tracer f sur $[-4\pi, 4\pi]$. Développer f en série de Fourier. La fonction f coincide-t-elle avec la somme de sa série de Fourier en tous points de $[-\pi, \pi]$? Etudier le cas particulier de $x = 0$. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$. En utilisant le Théorème de Bessel, quelle autre somme de série numérique peut-on facilement obtenir à partir de ce développement en série de Fourier?

(6) **(**)** On considère la fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ définie sur $[-\pi, \pi[$ par $f(x) = \cos \frac{x}{2}$.
 (a) Tracer f sur $[-4\pi, 4\pi]$.
 (b) Calculer les coefficients de Fourier de f.
 (c) Quelle est la nature de la série de Fourier S_f de f?
 (d) Déterminer les sommes des séries $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$.

(7) **(**)** Déterminer la série de Fourier de la fonction 2π-périodique impaire f définie par $f(x) = x^2$ si $x \in [0, \pi]$ et $f(\pi) = 0$. Quelles sommes de séries numériques peut-on en déduire.
 Mêmes questions avec
 (a) $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $x \mapsto \max(\cos x, \sin x)$.
 (b) $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $x \mapsto \max(|\cos x|, |\sin x|)$.

(8) **(**)** En utilisant une solution particulière sous forme de série trigonométrique, résoudre l'équation différentielle $y^{(4)} + 3y^{(2)} + 2y = |\cos t|$ (attention au domaine d'existence de la série).

(9) **(***) Théorème de Bernstein** Soit f 2π-périodique, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
 (a) Calculer les coefficients de Fourier de f' en fonction de ceux de f.
 (b) On suppose de plus que $\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$. Montrer que $\int_0^{2\pi} [f(t)]^2 dt \leq \int_0^{2\pi} [f'(t)]^2 dt$. En quel cas a-t-on égalité ?
 (c) Soit f 2π-périodique continue. Soient $a_n(f)$ et $b_n(f)$ ses coefficients de Fourier. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\big(a_n(f) \sin nx - b_n(f) \cos nx\big)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ et préciser sa somme en utilisant une intégrale de f.

(10) **(***)** Montrer que si une série trigonométrique converge uniformément sur $[0, \pi]$, alors elle est identique à la série de Fourier de sa somme. Donner la série de Fourier d'un polynôme trigonométrique. Montrer que la série trigonométrique $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. En utilisant la formule de Parseval, montrer qu'elle est différente de la série de Fourier de sa somme.

Feuille n^o 3:

Formes linéaires et espace dual

(1) **(*)** Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle , \rangle$ et $x_0 \in E$. Montrer que l'application $x \in E \mapsto \langle x, x_0 \rangle$ est une forme linéaire sur E. Déterminer son noyau.

(2) **(*)** Soit $E = \mathbb{R}^n[X]$. L'application $P \in E \mapsto P'(0)$ est-elle une forme linéaire sur E?

(3) **(*)** Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1])$, ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$. Montrer que $f \in E \mapsto \int_0^1 t\, f(t)dt$ est une forme linéaire sur E.

(4) **(**)** Soit E l'ensemble des suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\sum_{n=0}^{\infty} u_n^2 < \infty$. Montrer que $F = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E,\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{n+1} = 0 \right\}$ est un s.e.v. de E. Montrer que $\dim(F) = \infty$.

(5) **(**)** Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et soit u et v deux formes linéaires sur E telles que $\ker u \neq \ker v$. Déterminer les dimensions de $\ker u + \ker v$ et de $\ker u \cap \ker v$.

(6) **(**)** Soit $E = \mathbb{R}^n$. Pour $x = (x_1, \cdots, x_n) \in E$, on pose $f_i(x) = x_i - x_{i+1}$ pour $i = 1, \cdots, n-1$ et $f_n(x) = x_n - x_1$. Montrer que la famille $(f_i)_{1\leq i\leq n}$ est une famille de formes linéaires sur E. Rappeler ce qu'est E^*. A quelle condition $(f_i)_{1\leq i\leq n}$ est-elle une base de l'espace dual E^*? Dans le case où c'est bien une base duale de E^*, exprimer toute forme linéaire $f \in E^*$ dans cette base.

(7) **(**)** Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. Montrer qu'il existe un unique $P_0 \in E$ tel que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ on ait $P(0) = \int_{-1}^1 P_0(t)P(t)dt$. Calculer P_0 dans le cas où $n = 2$.

(8) **(**)** Soit $E = \mathbb{R}^n[X]$, soit $a \in \mathbb{R}$ et pour tout $k = 0, 1, \cdots, n$, on pose $P_k(X) = (X-a)^k$. Montrer que $e = (P_0, P_1, \cdots, P_n)$ est une base de E. Déterminer la base e^* duale de e et calculer les composantes sur e^* de la forme linéaire $\phi : P \mapsto \int_0^a P(t)dt$.

(9) **(**)** Soit $E = \mathbb{R}^n[X]$, soit $(b_0, \cdots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Pour tout $i = 0, 1, \cdots, n$, on note $u_i : P \in E \mapsto \int_0^{b_i} P(t)dt$. Montrer que la famille $(u_0, u_1, \cdots, u_n)$ est une base de E^* si et seulement si les b_i sont tous distincts.

(10) **(**)** Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel constitué des matrice carrées de taille n à coefficients réels. Montrer que $M \in E \mapsto \mathrm{Tr}(M)$, trace de M, est une forme linéaire sur E. Soit maintenant ϕ une forme linéaire sur E vérifiant $\phi(AB) = \phi(BA)$ pour toutes matrices A, B de E. Montrer alors que ϕ est proportionnelle à l'application Tr.

(11) **(***)** Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1])$. L'application $u : f \in E \mapsto f(1) - f(0)$ est-elle une forme linéaire sur E? Sur E on associe le produit scalaire $< f, g > := \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Peut-on trouver $g_0 \in E$ telle que $u(f) =< f, g_0 >$ pour tout $f \in E$? Si on considère maintenant le s.e.v. $F_n = \mathbb{R}^n[X]$ de E et le même produit scalaire avec $g \in F_n$, est-ce possible cette fois?

Feuille n^o 4:

Application linéaire adjointe et réduction des matrices symétriques et orthogonales

(1) **(**)** Soit E un espace euclidien et $\langle .,. \rangle$ son produit scalaire. Soit f une application linéaire $E \mapsto E$.
 (a) Soit $x \in E$ tel que pour tout $y \in E$, $\langle x, y \rangle = 0$. Montrer que $x = 0$.
 (b) En déduire que l'on peut bien définir une application $f^* : E \mapsto E$ telle que pour tout $x, y \in E$, $\langle f^*(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle$.
 (c) Montrer que f^* ainsi définie est linéaire.
 (d) Montrer que $\ker f = (\operatorname{Im} f)^\perp$ et que $\operatorname{Im} f = (\ker f)^\perp$.
 (e) Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E et M la base de f dans $(e_1, \dots, e_n)$. Donner la matrice de f^* dans $(e_1, \dots, e_n)$ en fonction de M.

(2) **(**)** Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E tel que pour tout $x \in E$, $< x, f(x) >= 0$. Montrer que $f^* = -f$, puis que $E = \ker f \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Im} f$.

(3) **(***)** Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E tel que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| \leq 1$. On pose $u = Id - f$. Montrer que $E = \ker(f - Id) \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Im}(f - Id)$, puis que $(\operatorname{Im} u)^\perp = \ker u = \ker(u^*)$.

(4) **(**)** On considère l'espace vectoriel R^3 muni du produit scalaire canonique, et $F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ x_1 - x_2 = 0\}$.
 (a) Préciser une base orthonormale de F.
 (b) Déterminer $F^\perp$, l'orthogonal de F. Préciser une base orthonormale de $F^\perp$.
 (c) Donner l'expression de p_F, la projection orthogonale sur F. Préciser les images par p_F des vecteurs de la base définie précédemment. Déterminer l'application adointe de p_F.
 (d) Pour $x \in \mathbb{R}^3$ donné, calculer $d(x; F)$.

(5) **(***)** Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E tel que $f^2 = Id$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes
 (a) f est une symétrie orthogonale.
 (b) f est symétrique ($f^* = f$ c'est à dire pour tout $x, y \in E$, $\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$).
 (c) f est une transformation orthogonale *i.e.* préserve le produit scalaire : $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$.

(6) **(**)** Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice orthogonale. Montrer que $\left| \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \right| \leq n$. *Indication :* Utiliser le vecteur $u = (1, 1, \dots, 1)$.

(7) **(**)** Soit $(E, < \cdot, \cdot >)$ un espace préhilbertien et soit $f : E \to E$ une application telle que $f(0) = 0$ et $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$ pour tout $x, y \in E$. Montrer que $< f(x), f(y) >=< x, y >$ pour tout $x, y \in E$. En déduire que f est une application linéaire orthogonale.

(8) **(***)** Soit E un espace euclidien et $u : E \mapsto E$ telle que pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| = \|x\|$. Montrer que pour tout $x, y \in E$, $\langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$. En déduire que u est une application linéaire orthogonale. Soit $f : E \mapsto E$ telle que pour tout $x, y \in E$, $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$. Montrer que $f = t \circ u$ où t est une translation et u est orthogonale.

(9) **(*)** Soit les matrices $M_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_3 = \begin{pmatrix} 13 & -4 & 2 \\ -4 & 13 & -2 \\ 2 & -2 & 10 \end{pmatrix}$. Pour chacune de ces matrices,
 (a) Déterminer les valeurs propres et des vecteurs propres orthonormaux associés.
 (b) Calculer la puissance n-ème de la matrice.

(10) **(*)** Montrer que si A et B sont des matrices symétriques de taille $n \geq 2$, $A\,B$ n'est pas forcément une matrice symétrique. Même question en remplaçant "symétrique" par orthogonale, puis examiner le

cas particulier où $B = A$.

(11) **(**)** Résoudre l'équation $M^2 = 4\,I_n$ pour M une matrice carrée de taille 2.

(12) **(***)** Pour a un réel, soit la matrice:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & \cdots 0 \\ a & 1 & a & 0 & \cdots 0 \\ 0 & a & 1 & a & \cdots 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & 0 & a & 1 \end{pmatrix}.$$

Diagonaliser M dans une base orthonormale. Calculer M^n.

(13) **(***)** Soit $X = {}^t(x_1, \ldots, x_n)$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$, où $n \in \mathbb{N}^*$ et soit la matrice $M = X \cdot {}^tX$.
   (a) Déterminer le rang de la matrice M (on pourra chercher le noyau de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ représenté par M).
   (b) En déduire les valeurs propres de M et les sous-espaces propres associés.
   (c) Calculer M^n.

(14) **(***)** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle telle que $A^3 + A = 0$. Montrer qu'alors $A = 0$.

Feuille n^o 5 :

Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques

(1) **(*)** Soit $< .,. >$ le produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ tel que $< x, y >= x_1y_1 - 2x_2y_1 - 2x_1y_2 + 3x_2y_2$ avec $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$. Vérifier que $< \cdot, \cdot >$ est bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$. A partir de la base orthonormale classique $e = (i, j)$ de $\mathbb{R}^2$, déterminer une base $e' = (e'_1, e'_2)$ orthonormale pour ce produit scalaire. Déterminer les coordonnées dans e' d'un vecteur quelconque x ayant pour coordonnées (x_1, x_2) dans e. Déterminer $(i - j)^\perp$.

(2) **(*)** Soit $(E, < ., . >)$ un espace préhilbertien. Montrer que l'application $\psi(x, y) =< x, y >$ est une forme bilinéaire symétrique sur E. Montrer que la forme quadratique associée à ψ est définie positive.

(3) **(*)** Soit $(E, < ., . >)$ un espace préhilbertien et u un endomorphisme sur E. Montrer que l'application $\Phi(x) =< x, u(x) >$ pour tout $x \in E$ est une forme quadratique sur E. Déterminer l'endomorphisme associé à Φ.

(4) **(**)** Soit Φ une forme quadratique définie positive sur $\mathbb{R}^n$. Si on note $\| \ \|$ la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^n$, montrer qu'il existe u un autmorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\Phi(x) = \|u(x)\|^2$.

(5) **(**)** Soit $(E, < \cdot, \cdot >)$ un espace euclidien et u, v deux endomorphismes de E symétriques pour $\langle , \rangle$ et qui commutent. Montrer qu'il existe une base de E orthonormée pour $\langle , \rangle$ et constituée de vecteurs propres communs à u et v.

(6) **(**)** Soit $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $\Phi(x) = x_1x_2 - 3x_2x_3 + 2x_1x_3$ pour $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.
  (a) Montrer que Φ est une forme quadratique. Donner la matrice représentative de ϕ la forme bilinéaire symétrique associée à Φ dans (e_1, e_2, e_3) base canonique de $\mathbb{R}^3$. ϕ est-elle dégénérée?
  (b) Déterminer $(e_1 + 2e_2)^\perp$ et $(\mathrm{Vect}(e_1 + 2e_2, e_2 + e_3)^\perp$.
  (c) Déterminer une base orthonormale pour ϕ.
  (d) Déterminer la signature de Φ.
  (e) Déterminer $\ker(\phi)$ et l'ensemble des vecteurs isotropes de Φ.

(7) **(**)** Soit $\phi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\phi(M) = \det(M)$.
  (a) Montrer que Φ est une forme quadratique sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
  (b) Donner la matrice représentative de ϕ, forme bilinéaire associée à Φ, dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
  (c) Appliquer le procédé d'orthogonalisation de Gauss à Φ et en déduire une base orthonormale pour Φ.

(8) **(**)** On considère sur $\mathbb{R}^3$ la forme quadratique $q(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_1$.
  (a) Montrer que q est définie positive.
  (b) Déterminer l'ensemble des vecteurs isotropes de q.

(9) **(**)** Soit $\Phi : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$ définie par $\Phi(P) =$ Discriminant de P.
  (a) Montrer que Φ est une forme quadratique sur $\mathbb{R}_2[X]$.
  (b) Donner la matrice représentative de ϕ, forme bilinéaire associée à Φ, dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
  (c) Appliquer le procédé d'orthogonalisation de Gauss à Φ; en déduire une base orthonormale de ϕ.
  (d) Déterminer $\ker(\phi)$ et l'ensemble des vecteurs isotropes de Φ.

(10) **(**)** Soit E l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ et soit $\Phi : f \in E \to \int_0^1 (f^2(t) + f'^2(t))dt$. Montrer que Φ est une forme quadratique sur E. Est-elle définie positive? Déterminer la forme bilinéaire symétrique ϕ associée à Φ. Est-ce un produit scalaire? La famille des $(\cos(nx), \sin(nx))_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle ϕ-orthogonale?

(11) **(**)** Suivant la valeur de λ, étudier la signature de la forme quadratique suivante:

$$\Phi(x, y) = (1 + \lambda)(x^2 + y^2) + 2(1 - \lambda)x\,y \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

(12) **(***)** Soit $E = \mathbb{R}^2$ et les deux formes quadratiques $\Phi_1(x, y) = 2x^2 - 2xy + 2y^2$, $\Phi_2(x, y) = -x^2 + 2xy$ pour tout $(x, y) \in E$. Déterminer les signatures de Φ_1 et Φ_2. Trouver une base orthonormale pour Φ_1. Décomposer Φ_2 dans cette base. Expliquer pourquoi il est possible de trouver une même base orthonormale pour Φ_1 et Φ_2, et la déterminer.

(13) **(**)** Déterminer l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}^2$ de l'équation

$$2x^2 + y^2 - 4xy = 0.$$