Corrections de quelques exercices de la feuille n^o 1:

Espaces euclidiens et préhilbertiens

(7) **(***)** On travaille dans $E = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_0^{+\infty} f(x)g(x)e^{-x}\mathrm{d}x$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$ le n-ième polynôme de Laguerre: $\forall x \in \mathbb{R},\ L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(e^{-x}x^n)$.

(a) Vérifier que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est bien un produit scalaire sur E.

(b) Calculer L_0, L_1, L_2 et L_3.

(c) Montrer que $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormale de $\mathbb{R}[X]$.

(d) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, Ln vérifie l'équation différentielle $xL_n''(x) + (1-x)L_n'(x) + nL_n(x) = 0$.

(e) Montrer que L vérifie l'équation $\forall n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R},\ (n+1)L_{n+1}(x) + (x-2n-1)L_n(x) + nL_{n-1}(x) = 0$.

Proof. a/ Pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, $\langle P, Q\rangle$ existe $P(x)Q(x)e^{-x}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{x\to\infty} x^2P(x)Q(x)e^{-x} = 0$, donc d'après le Théorème de Comparaison l'intégrale existe en $+\infty$. Il est clair que les 3 premières propriétés du produit scalaire sont vérifiées du fait de la linéarité de l'intégration, de la commutativité de la multiplication et qu'une intégrale d'une fonction positive est positive. Pour la quatrième propriété, si $\int_0^\infty P^2(x)e^{-x}dx = 0$, comme $P^2(x)e^{-x}$ est positive et continue, alors $P^2(x)e^{-x} = 0$ pour tout $x \geq 0$, soit $P = 0$.

b/ On a $L_0(x) = 1$, $L_1(x) = 1 - x$, $L_2(x) = (x^2 - 4x + 2)/2$ et $L_3(x) = (-x^3 + 9x^2 - 18x + 6)/6$.

c/ En premier lieu, il est clair que d'après la formule de Leibnitz, $L_n(x) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k}\binom{n}{k}\frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}$ donc L_n est bien un polynôme de degré n dont le coefficient de plus haut degré est $(-1)^n/n!$.

Ensuite, pour $n \leq m$,

$$\langle L_n, L_m\rangle = \frac{1}{m!}\int_0^\infty L_n(x)\frac{\partial^m}{\partial x^m}\big(x^me^{-x}\big)dx = \frac{1}{m!}\Big[L_n(x)\frac{\partial^{m-1}}{\partial x^m}\big(x^me^{-x}\big)\Big]_0^\infty - \frac{1}{m!}\int_0^\infty L_n'(x)\frac{\partial^{m-1}}{\partial x^{m-1}}\big(x^me^{-x}\big)dx$$

Si $m \geq 1$, $\frac{\partial^{m-1}}{\partial x^m}\big(x^me^{-x}\big) = e^{-x}P(x)$ et $P(0) = 0$. D'où $\Big[L_n(x)\frac{\partial^{m-1}}{\partial x^m}\big(x^me^{-x}\big)\Big]_0^\infty = 0$. Sinon, $n = m = 0$, et on voit bien qu'alors $\langle L_0, L_0\rangle = \int_0^\infty e^{-x}dx = 1$. Par itération on obtient que

$$\begin{aligned}\langle L_n, L_m\rangle &= (-1)^{n-1}\frac{1}{m!}\Big[L_n^{(n-1)}(x)\frac{\partial^{m-n}}{\partial x^m}\big(x^me^{-x}\big)\Big]_0^\infty + (-1)^n\frac{1}{m!}\int_0^\infty L_n^{(n)}(x)\frac{\partial^{m-n}}{\partial x^{m-n}}\big(x^me^{-x}\big)dx\\ &= (-1)^n\frac{1}{m!}\Big[(-1)^n\frac{\partial^{m-n-1}}{\partial x^{m-n-1}}\big(x^me^{-x}\big)\Big]_0^\infty\end{aligned}$$

car $L_n^{(n)}(x) = (-1)^n$, dès que $n < m$. On a donc bien $\langle L_n, L_m\rangle = 0$ car $\frac{\partial^{m-n-1}}{\partial x^{m-n-1}}\big(x^me^{-x}\big) = P(x)e^{-x}$ avec $P(0) = 0$.
Si $m = n$, on obtient

$$\langle L_n, L_n\rangle = \frac{1}{n!}\int_0^\infty x^ne^{-x}dx = 1$$

(cette valeur s'obtient dès que l'on connaît la fonction $\Gamma(t)$ vue en probabilités, ou bien par récurrence...). La famille est bien orthonormale.

d/ On a $L_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k\binom{n}{k}\frac{1}{k!}x^k$, d'où $L_n'(x) = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k+1}\binom{n}{k+1}\frac{1}{k!}x^k$ et $xL_n''(x) = \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}\binom{n}{k+1}\frac{1}{(k-1)!}x^k$.
On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}&xL_n''(x) + (1-x)L_n'(x) + nL_n(x)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\Big((-1)^{k+1}\binom{n}{k+1}\frac{1}{(k-1)!} + (-1)^{k+1}\binom{n}{k+1}\frac{1}{k!} - (-1)^k\binom{n}{k}\frac{1}{(k-1)!} + n(-1)^k\binom{n}{k}\frac{1}{k!}\Big)x^k\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\Big(-\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{n-k} + \frac{n}{(n-k)k}\Big)\frac{(-1)^nn!}{k!(n-k-1)!(k-1)!}x^k = 0.\end{aligned}$$

e/ On déduit cette relation soit de la même manière que dans la question d/, soit en écrivant que $\frac{\partial^n}{\partial x^n}\big(x^ne^{-x}\big) = \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\big((nx^{n-1} - x^n)e^{-x}\big) = n!L_{n-1}(x) - \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\big(x^ne^{-x}\big)$ etc... □

(9) **(**)** Calculer le minimum sur $\mathbb{R}^3$ de

$$f(a,b,c) = \int_0^{+\infty}(x^3 + ax^2 + bx + c)^2e^{-2x}dx.$$

Indication : On penser à une projection après avoir introduit le produit scalaire sur $\mathbb{R}_3[X]$

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^{+\infty}P(t)Q(t)e^{-2t}dt.$$

Proof. Avec la même méthode que dans l'exercice précédent, on peut montrer que $\langle P, Q\rangle$ est bien un produit scalaire. Si $\mathbb{R}_2[X]$ désigne l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2, alors en utilisant le produit scalaire proposé et la norme associée

$$\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} f(a,b,c) = \inf_{P(x)\in\mathbb{R}_2[X]} \|x^3 - P(x)\|^2.$$

Mais comme $\mathbb{R}_2[X]$ est un e.v. de dimension finie (3) alors cette borne inférieure est atteinte pour $p_{\mathbb{R}_2[X]}(x^3)$, projection orthogonale de x^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$. Comme $(1, x, x^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$, on en déduit que:

$$\langle x^3 - p_{\mathbb{R}_2[X]}(x^3), 1\rangle = \langle x^3 - p_{\mathbb{R}_2[X]}(x^3), x\rangle = \langle x^3 - p_{\mathbb{R}_2[X]}(x^3), x^2\rangle = 0.$$

Pour calculer ces différents produits scalaires, il est utile de calculer $u_n = \int_0^\infty x^n e^{-2x}dx$. Avec le changement de variables $y = 2x$, on a $u_n = (\int_0^\infty y^n e^{-y}dy)/2^{n+1}$, soit $u_n = n!/2^{n+1}$. De ceci, on obtient trois équations linéaires qui doivent être vérifiées par (a^*, b^*, c^*):

$$\left\{\begin{array}{lcl} 6/16 - 2a^*/8 - b^*/4 - c^*/2 & = & 0 \\ 24/32 - 6a^*/16 - 2b^*/8 - c^*/4 & = & 0 \\ 120/64 - 24a^*/32 - 6b^*/16 - 2c^*/8 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 3 - 2a^* - 2b^* - 4c^* & = & 0 \\ 6 - 3a^* - 2b^* - 2c^* & = & 0 \\ 15 - 6a^* - 3b^* - 2c^* & = & 0 \end{array}\right.$$

D'où $a^* = 9/2$, $b^* = -9/2$ et $c^* = 3/4$. □

(10) **(**)** Déterminer $\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (e^x - ax - b)^2 \mathrm{d}x$.

Proof. La preuve ressemble à celle ci-dessus, mais on considère le produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$, dont on sait que c'est bien un produit scalaire. On recherche donc

$$\inf_{P(x)\in\mathbb{R}_1[X]} \|e^x - P(x)\|^2 = \|e^x - p_{\mathbb{R}_1[X]}(e^x)\|^2,$$

où $p_{\mathbb{R}_1[X]}(e^x)$, projection orthogonale de e^x sur $\mathbb{R}_1[X]$. Comme $(1, x)$ est une base de $\mathbb{R}_1[X]$, on en déduit que:

$$\langle e^x - p_{\mathbb{R}_1[X]}(e^x), 1\rangle = \langle e^x - p_{\mathbb{R}_1[X]}(e^x), x\rangle = 0.$$

De ceci, on obtient deux équations linéaires qui doivent être vérifiées par (a^*, b^*):

$$\left\{\begin{array}{lcl} (e-1) - a^*/2 - b^* & = & 0 \\ 1 - a^*/3 - b^*/2 & = & 0 \end{array}\right.$$

D'où $a^* = 18-6e$ et $b^* = 4e-10$ et ainsi $\inf_{P(x)\in\mathbb{R}_1[X]} \|e^x - P(x)\|^2 = \int_0^1 e^{2x} - 2(a^*x + b^*)e^x + (a^{*2}x^2 + 2a^*b^*x + b^{*2})dx = 1/2(e^2 - 1) - 2(a^* + (e-1)b^*) + a^{*2}/3 + a^*b^* + b^{*2} = -7e^2/2 + 20e - 57/2$. □

(11) **(**)** Déterminer $\inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \int_0^\pi (x\sin(t) + y\cos(t) - t)^2 \mathrm{d}t$.

Proof. La preuve ressemble à celle ci-dessus, les différences étant que l'on considère le produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_0^\pi f(t)g(t)dt$ et que l'on recherche, avec le s.e.v. $E = \{x\sin(t) + y\cos(t),\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$

$$\inf_{P(t)\in E} \|t - P(t)\|^2 = \|t - p_E(t)\|^2,$$

où $p_E(t)$, projection orthogonale de la fonction $t \to t$ sur E. Comme $(\sin t, \cos t)$ est une base de E, on en déduit que:

$$\langle t - p_E(t), \sin t\rangle = \langle t - p_E(t), \cos t\rangle = 0.$$

De ceci, on obtient deux équations linéaires qui doivent être vérifiées par (x^*, y^*):

$$\left\{\begin{array}{lcl} \pi - \pi\, x^*/2 & = & 0 \\ -2 - \pi\, y^*/2 & = & 0 \end{array}\right.$$

D'où $x^* = 2$ et $y^* = -4/\pi$. On en déduit que $\inf_{P(t)\in E} \|t - P(t)\|^2 = \int_0^\pi (t - 2\sin t + 4\cos t/\pi)^2 dt = \pi^3/3 - 2\pi - 8/\pi$. □

(12) **(**)** Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ muni du produit scalaire défini par

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

(a) Déterminer une base orthonormée du sous-espace vectoriel F de E engendré par f_1, f_2 définies par $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x \quad x \in [0, 1]$.

(b) Déterminer la projection orthogonale sur F de $f : x \mapsto e^x$, $x \in [0, 1]$.

Proof. a/ f_1 et f_2 forment une base. Pour la rendre orthonormée, avec le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt, on pose $g_1 = f_1/\|f_1\| = f_1$ puis $g_2 = (f_2 - \langle g_1, f_2\rangle g_1)/\|f_2 - \langle g_1, f_2\rangle g_1\| = (x-1/2)/\|x-1/2\| = \sqrt{12}(x-1/2)$.
b/ On a $p_F(e^x) = \langle e^x, g_1\rangle g_1 + \langle e^x, g_2\rangle g_2 = \big(\int_0^1 e^x dx\big)1 + \big(\int_0^1 e^x(\sqrt{12}(x-1/2))dx\big)\sqrt{12}(x-1/2) = (4e-10) + (18-6e)x$ (on retrouve les résultats de l'exercice un peu plus haut). □

(13) **(**)** Soit $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[-1, 1]$.

(a) Montrer que l'on définit un produit scalaire sur E en posant

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)g(x)dx.$$

(b) On considère le sous-espace $F = \mathbb{R}_2[X]$ de E. Trouver une base orthogonale de F (polynômes de Tchébycheff de première espèce).

(c) Quelle est la meilleure approximation de $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.

Proof. a/ Une première chose à montrer serait que pour $f \in E$, $< f, f >$, qui est une intégrale impropre, existe. Les problèmes de convergence peuvent avoir lieu en -1 et 1 puisqu'ailleurs la fonction $f^2(x)/\sqrt{1-x^2}$ est continue. Or par exemple en 1, $f^2(x)/\sqrt{1-x^2} \sim f^2(1)/(\sqrt{2}\sqrt{1-x})$ et on sait que $\int_0^1 dx/\sqrt{1-x}$ existe. Donc d'après le théorème de comparaison, $\int_0^1 f^2(x)/\sqrt{1-x^2}dx$ existe. Ensuite, il est facile de voir que $\langle f, g\rangle$ est bien un produit scalaire (voir les exercices précédents), comme l'exercice (7) par exemple.
b/ Une base de F est $(1, X, X^2)$. On utilise alors le procédé d'orthonormalisation de Graham-Schmidt. Soit (e_1, e_2, e_3) la nouvelle base orthonormale que l'on déduit de $(1, X, X^2)$. En premier lieu, $e_1 = 1/\|1\|$. Or $\|1\|^2 = \int_{-1}^1 dx/\sqrt{1-x^2}dx = \arcsin(1) - \arcsin(-1) = \pi$. D'où $e_1 = 1/\sqrt{\pi}$.
Ensuite, $e_2 = (X - \langle e_1, X\rangle e_1)/\|X - \langle e_1, X\rangle e_1\|$. Mais $\langle e_1, X\rangle = 0$ pour des raisons de parité, d'où $e_2 = X/\|X\|$ et $\|X\|^2 = \int_{-1}^1 x^2dx/\sqrt{1-x^2}dx = 2\big(\big[-x\sqrt{1-x^2}\big]_0^1 + \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx\big) = 2\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta d\theta$ par intégration par parties et avec le changement de variable $x = \sin\theta$. On en déduit que $\|X\|^2 = \pi/2$, d'où $e_2 = \sqrt{2}X/\sqrt{\pi}$.
Enfin, $e_3 = (X^2 - \langle e_1, X^2\rangle e_1 - \langle e_2, X^2\rangle e_2)/\|X^2 - \langle e_1, X^2\rangle e_1 - \langle e_2, X^2\rangle e_2\| = (X^2 - 1/2)/\|X^2 - 1/2\|$. Par intégration par parties, $\|X^2\|^2 = 6\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx = 6\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\cos^2\theta d\theta = 3/2\int_0^{\pi/2}\sin^2(2\theta)d\theta = 3\pi/8$. Par suite, $\|X^2 - 1/2\|^2 = 3\pi/8 - \pi/2 + \pi/4 = \pi/8$ d'où $e_3 = \sqrt{2}(2X^2 - 1)/\sqrt{\pi}$.
c/ On sait qu'avec $g(x) = \sqrt{1-x^2}$, $p_F(g) = \langle e_1, g\rangle e_1 + \langle e_2, g\rangle e_2 + \langle e_3, g\rangle e_3$. Or $\langle e_1, g\rangle = 2/\sqrt{\pi}$, $\langle e_2, g\rangle = 0$ et $\langle e_3, g\rangle = \sqrt{2}/\sqrt{\pi}\int_{-1}^1(2x^2 - 1)dx$. Après calculs, on obtient $p_F(g) = (10 - 8x^2)/3\pi$.

□

(14) **(**)** Soit $E = \mathbb{R}[X]$.

(a) Montrer que pour tout $P \in E$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(x)e^{-x^2}dx$ est convergente.

(b) Pour P et Q dans E, on pose

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x^2}dx.$$

Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

(c) Donner une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.

Proof. a/ Comme $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on a $x \mapsto P(x)Q(x)e^{-x^2}$ qui est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ donc les seuls problèmes de convergence ont lieu en $\pm\infty$. Or $\lim_{x\to+\infty} x^2P(x)Q(x)e^{-x^2} = \lim_{x\to-\infty} x^2P(x)Q(x)e^{-x^2} = 0$ donc d'après le critère de Riemann, $\langle P, Q\rangle$ existe toujours. Ensuite, il est facile de voir la linéarité de ce produit scalaire, sa commutativité et le fait que $\langle P, P\rangle \geq 0$. Enfin, comme dans l'exercice (7), on montre que $\langle P, P\rangle \geq 0$ si et seulement si $P = 0$.
b/ On sait que $(1, X, X^2)$ est une base de de $\mathbb{R}_2[X]$. Notons $\|1\| = \big(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\big)^{1/2}$ (en fait on peut montrer que $\|1\| = \pi^{1/4}$, voir le chapitre sur les intégrales multiples). Alors $u_1 = 1/\|1\|$ est un vecteur normé. Ensuite, par le procédé d'orthonormalisation de Graham-Schmidt, on pose $u_2 = (X - \langle X, u_1\rangle u_1)/\|X - \langle X, u_1\rangle u_1\| = X/\|X\|$ car la fonction xe^{-x^2} est impaire. Comme $\|X\| = \|1\|$ (par intégration par parties), on en déduit que $u_2 = X/\|1\|$. Enfin, $u_3 = (X^2 - \langle X^2, u_1\rangle u_1 - \langle X^2, u_2\rangle u_2)/\|X^2 - \langle X^2, u_1\rangle u_1 - \langle X^2, u_2\rangle u_2\|$. Par parité, $\langle X^2, u_2\rangle = 0$ et on a vu que $\langle X^2, u_1\rangle u_1 = 1$. D'où $u_3 = (X^2 - 1)/\|X^2 - 1/2\|$, et comme $\|X^2 - 1/2\|^2 = \|X^2\|^2 - \|X\|^2 + \|1\|/4 = 9\|1\|/4$, on en déduit que $u_3 = 2(X^2 - 1)/3\|1\|$. □

(15) **(***)** Soit E un espace euclidien et $(e_1, \ldots, e_n)$ un système de vecteurs unitaires tels que

$$\text{pour tout } x \in E \qquad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle^2.$$

Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée.

Proof. On ne sait pas qu'elle est la dimension de E. Il est clair que pour tout $j = 1, \cdots, n$, alors $\|e_j\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle e_j, e_i\rangle^2 = \|e_j\|^2 + \sum_{i=1, i\neq j}^n \langle e_j, e_i\rangle^2$, d'où $\langle e_j, e_i\rangle = 0$ pour tout $i \neq j$. On en déduit ainsi que $(e_1, \cdots, e_n)$ est une famille orthonormale. Par ailleurs, si $x \in \mathrm{Vec}(e_1, \cdots, e_n)^\perp$, alors $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle^2 = 0$, d'où $x = 0$. Or comme E est de dimension finie, alors $E = \mathrm{Vec}(e_1, \cdots, e_n) + \mathrm{Vec}(e_1, \cdots, e_n)^\perp$ d'où $E = \mathrm{Vec}(e_1, \cdots, e_n)$ et donc $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E. □