*Université Paris I, Panthéon - Sorbonne*

**Licence M.A.S.S. deuxième année** $2008-2009$

# Analyse S4

Correction du Contrôle continu n°1, mars 2009

*Examen de 1h00. Tout document ou calculatrice est interdit.*

1. Soit l'équation différentielle:

$$(E) \qquad y^{(4)} - y'' - 2y' + 2y = 2 + e^x.$$

Déterminer l'ensemble des solutions de $(E)$ (on pourra chercher des solutions évidentes de l'équation caractéristique).

*Proof.* L'équation homogène $(EH)$ est $y^{(4)}-y''-2y'+2y=0$ et l'équation caractéristique associée est $x^4-x^2-2x+2=0$. 1 est une racine évidente, de multiplicité 2 et on a ainsi $x^4-2x^2+2x+2=(x-1)^2(x^2+2x+2)$. On trouve ainsi deux racines conjuguées $1+i$ et $1-i$. En conséquence, $\mathcal{H}=\{(ax+b)e^x+(\alpha\cos(x)+\beta\sin(x))e^x,\ (a,b,\alpha,\beta)\in\mathbf{R}^4\}$. Pour trouver les solutions particulières, on utilise la méthode de superposition des solutions. Pour l'équation $y^{(4)}-y''-2y'+2y=2$ il est clair que $\tilde{y}=1$ est solution. Pour $y^{(4)}-y''-2y'+2y=e^x$, une solution est de la forme $\tilde{y}(x)=P(x)e^x$, mais comme 1 est racine de multiplicité 2, il faut que $\deg P=2$. Ainsi on trouve $\tilde{y}(x)=x^2\,e^x/10$. En conséquence la solution générale de $(E)$ est:

$$\mathcal{E}=\{1+(x^2/10+ax+b)e^x+(\alpha\cos(x)+\beta\sin(x))e^x,\ (a,b,\alpha,\beta)\in\mathbf{R}^4\}.$$

□

2. Soit l'équation différentielle:

$$(E) \qquad (x+1)\,y'(x) - 2x\,y(x) = 1.$$

(a) Déterminer sur quel ensemble résoudre cette équation.

(b) Résoudre l'équation homogène associée à $(E)$.

(c) Déterminer des primitives des fonctions $e^{-2x}$, $x\,e^{-2x}$ et $x^2\,e^{-2x}$.

(d) En déduire l'ensemble des solutions de $(E)$.

(e) Existe-t-il une solution maximale de $(E)$ sur $\mathbf{R}$?

(f) Existe-t-il une solution telle que $y(0)=0$. Quelle est-elle? Pouvait-on savoir à l'avance qu'une telle solution existait?

*Proof.* a/ La résolution peut se faire sur $]-\infty,-1[$ ou $]-1,\infty[$.
b/ L'équation homogène $(EH)$ associée est $(x+1)\,y'(x)-2x\,y(x)=0$ dont la solution générale est $y(x)=C\int^x -\frac{2t}{t+1}dt$ où $C\in\mathbf{R}$. Mais $\int^x \frac{2t}{t+1}dt=\int^x 2dx-\int^x\frac{2}{t+1}=2x-2\ln|x+1|$. Ainsi $\mathcal{H}=\{C\,\frac{e^{2x}}{(x+1)^2},\ C\in\mathbf{R}\}$.
c/ $\int^x e^{-2t}dt=-\frac{1}{2}e^{-2x}$, puis par intégration par parties $\int^x te^{-2t}dt=[-te^{-2t}/2]^x+\frac{1}{2}\int^x e^{-2t}dt=-\frac{1}{4}(2x+1)e^{-2x}$, et enfin $\int^x t^2e^{-2t}dt=[-t^2e^{-2t}/2]^x+\int^x te^{-2t}dt=-\frac{1}{4}(2x^2+2x+1)e^{-2x}$.
d/ La méthode de variation des constantes pour $\tilde{y}(x)=C(x)\,\frac{e^{2x}}{(x+1)^2}$ amène à l'équation $C'(x)\,\frac{e^{2x}}{(x+1)^2}=\frac{1}{x+1}$, soit $C'(x)=(x+1)e^{-2x}$. On en déduit donc qu'une primitive est $C(x)=-\frac{1}{4}(2x+3)e^{-2x}$ et donc que pour $x\in]-\infty,1[$ ou $x\in]1,\infty[$,

$$\mathcal{E}=\{-\frac{2x+3}{4(x+1)^2}+C\,\frac{e^{2x}}{(x+1)^2},\ C\in\mathbf{R}\}.$$

e/ En $-1$ la solution particulière n'est pas définie, donc il n'existe pas de solution maximale sur $\mathbf{R}$.
f/ Si $y(0) = 0$ alors $-\frac{3}{4} + C = 0$ donc $C = \frac{3}{4}$. Il existe donc une unique solution telle que $y(0) = 0$ maximale sur $]-1, \infty$: $y(x) = -\frac{2x+3}{4(x+1)^2} + \frac{3}{4}\frac{e^{2x}}{(x+1)^2}$. On savait qu'une telle solution existait grâce au théorème de Cauchy-Lipshitz. $\square$