Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2008 − 2009

Analyse S4

Contrôle continu n°2, avril 2009

Examen de 1h30. Tout document ou calculatrice est interdit.

1. Soit l'équation différentielle:

$$(E) \qquad x^2y''(x) + 3xy'(x) + y(x) = 1 + x^2.$$

   (a) Déterminer sur quels ensembles résoudre cette équation.

   (b) Chercher une solution de l'équation homogène (EH) associée à (E) sous la forme $y(x) = x^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbf{R}$.

   (c) En déduire que l'ensemble $\mathcal{H}$ des solutions maximales de (EH) est

$$\mathcal{H} = \Big\{ y :]-\infty, 0[\mapsto \frac{\lambda}{x} + \mu \, \frac{\ln |x|}{x}, \ (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2 \Big\} \bigcup \Big\{ y :]0, \infty[\mapsto \frac{\lambda}{x} + \mu \, \frac{\ln |x|}{x}, \ (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2 \Big\}.$$

   (d) Chercher une solution particulière de (E). En déduire l'ensemble des solutions de (E).

   (e) Montrer qu'il existe une unique solution maximale de (E) sur $\mathbf{R}$.

2. Soit $\theta \in]0, \pi[$ et la série entière $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(n\theta)}{n(n+1)} x^n$.

   (a) Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.

   (b) Montrer que si $S(x) = \displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(n\theta)}{n(n+1)} x^n$ alors S est définie sur $[-1, 1]$.

   (c) Montrer que S est continue sur $[-1, 1]$.

   (d) Expliquer pourquoi S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$.

   (e) Donner l'expression sous forme de série entière de $g(x) = x^2 S'(x)$, puis, après justifications, en déduire que $g'(x) = \sum_{n=1}^\infty \cos(n\theta) x^n$ pour $x \in]-1, 1[$.

   (f) Rappeler la valeur de $\sum_{n=1}^\infty z^n$ (valable pour quelles valeurs de $z \in \mathbf{C}$?). En écrivant $\cos(n\theta)$ sous la forme d'une exponentielle complexe, en déduire que $g'(x) = \dfrac{x(\cos\theta - x)}{(x - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta}$ pour $x \in]-1, 1[$.

   (g) **(Question facultative et difficile...)** Avec ce dernier résultat montrer que S est dérivable sur $[-1, 1]$, mais que la dérivée seconde de S n'existe pas en 1 et en −1.

   (h) Dans le cas où $\theta = \pi/2$, en déduire $g(x)$ pour $x \in]-1, 1[$, puis à l'aide d'intégrations par parties en déduire que pour $x \in]-1, 1[$,

$$S(x) = 1 - \frac{\text{Arctan}(x)}{x} - \frac{1}{2} \log(1 + x^2).$$

   En justifiant, déduire de ceci la valeur exacte de $S(1)$ pour $\theta = \pi/2$. Comment $S(1)$ peut-elle encore s'écrire sous la forme de série entière (sans cosinus)?