Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2008 − 2009

Analyse S4

Contrôle continu n°3, mai 2009

Examen de 1h00. Tout document ou calculatrice est interdit.

1. Soit la fonction:
$$F(x) = \int_0^1 t^x \ln(1+t)dt.$$
   (a) Montrer que l'ensemble de définition de F est $]-2,\infty[$ (on pourra traiter différemment les cas $x \geq 0$ et $-2 < x < 0$).
   (b) Déterminer l'ensemble de continuité de F.
   (c) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-2,\infty[$ et préciser $F'(x)$.
   (d) Déterminer $\lim_{n\to\infty} F(n)$ avec $n \in \mathbf{N}$. Montrer que F est décroissante sur $]-2,\infty[$. En déduire $\lim_{x\to\infty} F(x)$.
   (e) Donner le développement en série entière de $\ln(1+t)$ en précisant son domaine de validité.
   (f) Soit $x > -2$, fixé. On considère pour $n \in \mathbf{N}^*$,
$$J_n(t) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{t^{k+x}}{k}.$$
   En utilisant le critère des séries alternées, montrer que la suite de fonctions $(J_n(t))_n$ converge uniformément sur $[0,1]$. En déduire que pour $x > -2$,
$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k(k+1+x)}.$$