Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2008 – 2009

Analyse S4

Contrôle continu n°3, mai 2009

Examen de 1h00. Tout document ou calculatrice est interdit.

1. Soit la fonction:
$$F(x) = \int_0^1 t^x \ln(1+t)dt.$$
   (a) Montrer que l'ensemble de définition de F est $]-2,\infty[$ (on pourra traiter différemment les cas $x \geq 0$ et $-2 < x < 0$).
   (b) Déterminer l'ensemble de continuité de F.
   (c) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-2,\infty[$ et préciser $F'(x)$.
   (d) Déterminer $\lim_{n\to\infty} F(n)$ avec $n \in \mathbf{N}$. Montrer que F est décroissante sur $]-2,\infty[$. En déduire $\lim_{x\to\infty} F(x)$.
   (e) Donner le développement en série entière de $\ln(1+t)$ en précisant son domaine de validité.
   (f) Soit $x > -2$, fixé. On considère pour $n \in \mathbf{N}^*$,
$$J_n(t) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{t^{k+x}}{k}.$$
   En utilisant le critère des séries alternées, montrer que la suite de fonctions $(J_n(t))_n$ converge uniformément sur $[0,1]$. En déduire que pour $x > -2$,
$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k(k+1+x)}.$$

Proof. (a) Pour $x \geq 0$, $t \in [0,1] \mapsto t^x \ln(1+t)$ est une fonction continue donc intégrable sur $[0,1]$.
Pour $-2 < x < 0$, il y a un problème de convergence en 0. Mais alors avec $\ln(1+t) \sim t$ pour $t \to 0$, $t^x \ln(1+t) \sim t^{x+1}$. Comme pour tout $x > -2$, $x+1 > -1$ alors $\int_0^1 t^{x+1}dt$ existe et ainsi d'après le Théorème de comparaison pour les intégrales impropres, $F(x)$ existe. En conséquence l'ensemble de définition de F est bien $]-2,\infty[$.
(b) En premier lieu, la fonction $(x,t) \to t^x \ln(1+t)$ est bien continue sur $]-2,\infty[\times]0,1]$ comme produit de fonctions continues. Soit $a > -2$. Alors pour tout $x \geq a$, pour tout $t \in]0,1]$, $t^x \leq t^a$. En conséquence, pour tout $x \geq a$, $\left|t^x \ln(1+t)\right| \leq t^a \ln(1+t) = g(t)$ pour tout $t \in]0,1]$. Mais $\int_0^1 g(t)dt < \infty$ donc d'après le Théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre, F est bien continue sur $[a,\infty[$. Comme cela est vrai pour tout $a > -2$, on en déduit que F est continue sur $]-2,\infty[$.
(c) La fonction $f(x,t) = t^x \ln(1+t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-2,\infty[\times]0,1]$ comme produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Par ailleurs, la fonction $f(x,t)$ est telle que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = t^x \ln t \ln(1+t)$ pour tout $x > -2$ et $t \in]0,1]$. Ainsi, comme $\ln(1+t) \leq t$ pour tout $t \geq 0$, pour tout $a > -2$ et tout $x \geq a$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq t^{a+1}|\ln t|$. Mais $\int_0^1 t^{a+1}|\ln t|dt < \infty$ d'après le Théorème de comparaison des intégrales impropres, car comme $a+1 > -1$ il existe $-1 < b < a+1$ tel que $t^{a+1}|\ln t| \leq t^b$ pour tout $t \in]0,1]$ et $\int_0^1 t^b dt < \infty$. Donc avec $g_1(t) = t^{a+1}|\ln t|$ on est bien sous les hypothèses du Théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre: F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,\infty[$ pour tout $a > -2$, donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-2,\infty[$.
(d) Soit la suite de fonctions $(g_n(t))_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $g_n(t) = t^n \ln(1+t)$ pour tout $t \in [0,1]$. Comme vu précédemment, $\int_0^1 g_n(t)dt = F(n)$ existe pour tout $n \in \mathbf{N}$ et $|g_n(t)| \leq \ln(1+t)$ avec $\int_0^1 \ln(1+t)dt < \infty$. De plus pour tout $t \in [0,1]$, $g_n(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g_\infty(t)$ avec $g_\infty(t) = 0$ si $t \in [0,1[$ et $g(1) = \ln(2)$. En conséquence d'après le Théorème de Lebesgue,

$\int_0^1 g_n(t)dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 g_\infty(t)dt = 0$.
Il est clair que pour tout $t \in [0,1]$, si $x \geq y > -2$ alors $0 \leq t^x \leq t^y$ donc comme $\ln(1+t) \geq 0$, $0 \leq t^x \ln(1+t) \leq t^y \ln(1+t)$, soit $F(x) \leq F(y)$: la fonction F est bien décroissante sur $]-2,\infty[$.
Pour tout $x \geq 0$, $[x] \leq x < [x]+1$. Or quand $x \to \infty$, $[x] \in \mathbf{N} \to \infty$ et $[x]+1 \in \mathbf{N} \to \infty$, donc $F([x]) \to 0$ et $F([x]+1) \to 0$. Comme F est décroissante, $F([x]+1) \leq F(x) \leq F([x])$ doc d'après le Théorème des "gendarmes", $\lim_{x\to\infty} F(x) = 0$.
(e) On sait que $\ln(1+t) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{t^n}{n}$ pour tout $t \in]-1,1[$.
(f) Soit donc $J_n(t) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{t^{k+x}}{k}$ où $x > -2$. Donc $J_n(t) = t^x \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{t^k}{k}$. Il est clair que pour $t \in]-1,1[$, $J_n(t) \to t^x \ln(1+t)$ quand $n \to \infty$. De plus $\left|J_n(t) - t^x \ln(1+t)\right| \leq t^x \left|\frac{t^{n+1}}{n+1}\right|$ d'après le critère des séries alternées (la fonction $n \to \frac{t^{n+1}}{n+1}$ est décroissante avec n). Donc dès que $n \geq 1$, pour tout $x > -2$, $\left|J_n(t) - t^x \ln(1+t)\right| \leq \frac{1}{n+1}$ et $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$. La série de fonctions $(J_n(t))$ converge uniformément sur $[0,1]$.
On sait que pour une série de fonctions uniformément convergente de fonctions continues on peut intervertir la somme et l'intégrale. Donc pour tout $x > -2$,

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} J_n(t)dt = F(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^1 \frac{t^{k+x}}{k}dt = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}\Big[\frac{1}{x+k+1}t^{x+k+1}\Big]_0^1 = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k(k+x+1)}.$$

□