Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année $2008 - 2009$

Corrections de quelques exercices de la feuille n^o 1:

Equations différentielles

(1) **(**)** On considère l'équation différentielle $y' = \sin y$ avec $y(0) = y_0$ et $y_0 \in]-\pi, \pi[$. Montrer qu'il existe une unique solution à ce problème de Cauchy. La déterminer lorsque $y_0 = 0$. Si $y_0 \in]0, \pi[$, montrer que toute solution appartient est croissante. Avec le changement de variable $u = \ln|\tan(y/2)|$, déterminer une solution maximale de l'équation lorsque $y_0 \in]0, \pi[$, puis en trouver une lorsque $y_0 \in]-\pi, 0[$.

Proof. *Résoudre le pb lorsque $y_0 = 0$
$(\mathbf{R}, 0)$ est solution maximale. En effet: $\forall x \in \mathbf{R}$, $u(x) = 0 \Rightarrow u'(x) = 0 = \sin(0)$; $u(0) = 0 = y_0$.
Remarque: $(\mathbf{R}, k\pi)$ solutions du pb $y'(x) = \sin y(x)$ avec $k \in \mathbf{Z}$ car $\forall x \in \mathbf{R}, u(x) = k\pi \Rightarrow u'(x) = 0$ et $\sin(k\pi) = 0$.
Or $(\mathbf{R}, k\pi), \forall k \in \mathbf{Z}$ ne sont pas solutions du pb car $u(0) = k\pi \neq 0$ si $k \neq 0$.
(a) Si $0 < y_0 < \pi \Rightarrow \forall x \in \mathbf{R}$, $u(x)$ vérifie: $u'(x) = \sin(u(x))$; $u(0) = y_0 \in]0, \pi[$. Vérifions que $\forall x \in \mathbf{R}$, $u(x) \in]0, \pi[$ qd $0 < y_0 < \pi$. Par l'absurde:
1) Supposons qu'$\exists x_1 \in \mathbf{R}$ tq $u(x_1) \leq 0 \Rightarrow u(x_1) \leq 0$; $u(0) = y_0 \in]0, \pi[$ et $x_1, 0 \in \mathbf{R}$. Par le théorème des valeurs intermédiaires: $\exists x_2 \in [0, x_1]$ (ou $[x_1, 0]$) tq $u(x_2) = 0$. u est solution de: $y'(x) = \sin y(x)$; $y(x_2) = 0$. Ce pb a la solution évidente $(\mathbf{R}, 0)$ donc $u = 0$ sur $\mathbf{R}$ i.e. $\forall x \in \mathbf{R}$, $u(x) = 0$ donc $u(0) = 0$ contredit $u(0) = y_0 \in]0, \pi[$.
2) Supposons qu'$\exists x_3 \in \mathbf{R}$ tq $u(x_3) \geq \pi \Rightarrow u(x_3) \geq \pi$; $u(0) = y_0 \in]0, \pi[$ et $x_3, 0 \in \mathbf{R}$. Par le théorème des valeurs intermédiaires: $\exists x_4 \in [0, x_3]$ (ou $[x_3, 0]$) tq $u(x_4) = \pi, x_4 \in \mathbf{R}$. u est solution de: $y'(x) = \sin y(x)$; $y(x_4) = \pi$. Ce pb a la solution évidente $(\mathbf{R}, \pi)$ donc $u = \pi$ sur $\mathbf{R}$ i.e. $\forall x \in \mathbf{R}$, $u(x) = \pi$ donc $u(0) = \pi$ contredit $u(0) = y_0 \in]0, \pi[$.
Bilan: $\forall x \in \mathbf{R}, u(x) = \in]0, \pi[$ si $0 < y_0 < \pi$, $\forall x \in \mathbf{R}, \frac{u(x)}{2} = \in]0, \frac{\pi}{2}[$ si $0 < y_0 < \pi$ donc $\exists \tan(\frac{u(x)}{2}) > 0$ (on remarque que u derivable car $\exists y' = \sin(y)$).
Soit $\Phi : x \to u(x) \to \frac{u(x)}{2} \to \tan\frac{u(x)}{2} \to \ln(\tan\frac{u(x)}{2})$. La fonction Φ est donc bien définie sur $\mathbf{R}$ et est dérivable.
(b) Si $-\pi < y_0 < 0$. On vérifie de la même manière que dans le cas (a) que: $\forall x \in \mathbf{R}$, $u(x) \in]-\pi, 0[$ qd $-\pi < y_0 < 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbf{R}$, $\frac{u(x)}{2} \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$ si $-\pi < y_0 < 0$ donc $\exists \tan(\frac{u(x)}{2}) < 0 \Rightarrow |\tan(\frac{u(x)}{2})| = -\tan(\frac{u(x)}{2}) > 0 \Rightarrow$ $\Phi(x) = \ln(-\tan(\frac{u(x)}{2}))$ est bien définie sur $\mathbf{R}$ et est derivable.
$\Phi(x) = \ln(|\tan(\frac{u(x)}{2})|) \Rightarrow \Phi'(x) = 1, \forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow \int_{x_0}^{x} \Phi'(s)ds = \int_{x_0}^{x} 1ds$ avec $x_0 = 0$. Donc $\Phi(x) = \Phi(0) + x \Leftrightarrow$ $|\tan(\frac{u(x)}{2})| = |\tan(\frac{y_0}{2})|e^x, \forall x \in \mathbf{R}$. $\forall x \in \mathbf{R}$, $\tan(\frac{u(x)}{2}) = \epsilon(x)\tan(\frac{y_0}{2})e^x$ avec $\epsilon : \mathbf{R} \to \{-1, 1\} \Rightarrow \epsilon(x) = \frac{\tan(\frac{u(x)}{2})}{\tan(\frac{y_0}{2})e^x}$.
De plus, $\epsilon(0) = 1$ donc $\forall x \in \mathbf{R}$, $\epsilon(x) = 1$, d'ou $\tan(\frac{u(x)}{2}) = \tan(\frac{y_0}{2})e^x \Rightarrow u(x) = 2\arctan(\tan(\frac{y_0}{2})e^x)$, pour tout $x \in \mathbf{R}$. □

(5) **(*)** Résoudre l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = 6xe^x$.

Proof. La solution est $y(x) = e^x(x^3 + \lambda x + \mu)$. □

(7) **(*)** Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = \cos(\omega x)$ avec $\omega \in \mathbf{R}$ fixé.

Proof. Si $\omega = 0$, la solution générale est $1 + c_1 \cos x + c_2 \sin x$, où $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$. Si $|\omega| = 1$, la solution générale est $\frac{1}{2}x \sin x + c_1 \cos x + c_2 \sin x$, où $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$. Sinon la solution générale est $\frac{1}{1-|\omega|^2}\cos(\omega x) + c_1 \cos x + c_2 \sin x$. On remarque que l'on a la convergence simple: $f_\omega \to f_1$ avec $\omega \to 1$. □

(8) **(**)** Déterminer les solutions maximales des équations différentielles suivantes avec la condition initiale $y(1) = 0$:

$$\begin{array}{lll} (2+x)y' = 2 - y & xy' + y = \cos x & 3xy' - 4y = x \\ 2x(1-x)y' + (1-2x)y = 1 & x(x+1)y' + y = \arctan x & x(x^2-1)y' + 2y = x\ln x - x^2. \end{array}$$

Proof. a) $(2+x)y' = 2 - y$. La solution générale est $y(x) = 2 + \frac{\lambda}{x+2}$ pour $x < 2$ ou $x > 2$ avec $\lambda \in]-2, \infty[$.
b) $xy' + y = \cos x$. La solution générale est $y(x) = \frac{constante + \sin x}{x}$ pour $x \in]0, \infty[$.
c) $3xy' - 4y = x$. La solution générale est $y(x) = \lambda x^{4/3} - x$ pour $x \in]0, \infty[$.
d) $2x(1-x)y' + (1-2x)y = 1$. La solution générale est $y(x) = \frac{Arg\cosh(1-2x)+\lambda}{2\sqrt{x^2-x}}$ pour $x < 0$, $y(x) = \frac{Arg\sin(2x-1)+\mu}{2\sqrt{x-x^2}}$ pour $0 < x < 1$ et $y(x) = \frac{-Arg\cosh(2x-1)+\nu}{2\sqrt{x^2-x}}$ pour $1 < x$. Mais il n'est pas possible d'avoir $y(1) = 0$!
e) $x(x+1)y' + y = \arctan x$. La solution générale est $y(x) = \frac{x-1}{2x}\arctan x + \frac{x+1}{2x}(\ln\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} + \lambda)$ pour $x \in]0, \infty[$.
f) $x(x^2-1)y' + 2y = x\ln x - x^2$. La solution générale est $y(x) = \frac{x}{1-x^2}((1+x)\ln x + 1 + \lambda x)$ pour $x \in]0,1[\cup]1,\infty[$, mais on ne peut pas étendre cette solution en 1.
. □

(9) **(**)** Déterminer une solution maximale des équations différentielles suivantes:
$(1+x^2)y' - 2xy = 0$; $y' - 2y = xe^{-|x|}$; $xy' + y - \ln|x| = 0$; $(1+\frac{1}{x})y' - y = 0$.

Proof. a) $(1+x^2)y' - 2xy = 0$. La solution générale est $y(x) = \lambda(x^2+1)$ avec $\lambda \in \mathbf{R}$.
b) $y' - 2y = xe^{-|x|}$. La solution de l'équation homogène est $y(x) = \lambda e^{2x}$. On effectue ensuite une MVC, ce qui donne $\lambda'(x) = xe^{-|x|-2x}$. Pour $x > 0$: $\lambda'(x) = xe^{-3x}$ donc $\lambda = -\frac{3x+1}{9}e^{-3x} + \mu$ et donc $y(x) = -\frac{3x+1}{9}e^{-x} + \mu e^{2x}$. Pour $x < 0$: on a $\lambda'(x) = xe^{-x}$ donc $\lambda = -(x+1)e^{-x}$ et donc $y(x) = -(x+1)e^{x} + \mu e^{2x}$.
On peut raccorder en 0 (y et y') si et seulement si $\lambda = \mu = -\frac{8}{9}$.
c) $xy' + y - \ln|x| = 0$. Il y a un second membre. Les solutions sont de la forme $y(x) = \ln|x| - 1 + \frac{\lambda}{x}$ si $x \in]-\infty, 0[$ ou $x \in]0, \infty[$.
d) $(1+\frac{1}{x})y' - y = 0$. la solution $y_0 = \frac{ke^x}{1+x}$ sur l'intervalle $]-\infty, 1[$ ou $]1, \infty[$. □

(10) **(***)** Chercher les solutions de l'équation différentielle $x(x^2-1)y' + 2y = x^2$. Existe-t-il une solution définie sur $\mathbf{R}$?

Proof. Les intervalles de définition sont les: $I_1 =]-\infty; -1[$, $I_2 =]-1; 0[$, $I_3 =]0; 1[$, $I_1 =]1; +\infty[$. De plus, puisque $x \to x(x^2-1)$ est impaire, une solution f_3 sur I_3 donne une solution sur I_2 par $f_2(t) = f_3(- \to t)$ et de même pour I_4 et I_1.
L'équation homogène associée (E) est (EH) $y' - a(y) = 0$ avec $a(x) = \frac{-2}{x(x^2-1)} = 2(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2-1})$. Les solution de (EH), qui est du premier ordre et linéaire, sont donc les $x \to \lambda\frac{x^2}{x^2-1}$.
Pour trouver une solution particulière, on effectue une MVC en posant $y(x) = \frac{x^2}{x^2-1}\Phi(x)$, ce qui mène à $\Phi'(x) = \frac{1}{x}$ et donc $\phi(x) = \ln x$.
Ainsi, la solution générale est de la forme $y(x) = \frac{x^2}{x^2-1}(\ln x + \lambda_k)$, avec $k \in \{1,2,3,4\}$ sur un des intervalles décrits plus haut.
Pour que les solutions se recollent bien en 1, il faut que $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$, ce qui donne $y(x) = \frac{x^2\ln x}{x^2+1}$, $y(1) = \frac{1}{2}$, $y'(1) = \frac{1}{2}$ et il faut en plus que cette solution admette une limite en 0 qui vale 0. Comme de $\frac{y}{x}$ admet aussi un limite en 0, le prolongement par continuité plus prolongement par parité est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ et la solution unique est donc, sous une forme 'clairement' paire: $y : x \to \frac{1}{2}\frac{x^2\ln x^2}{x^2-1}$.
□

(11) **(**)** Déterminer une solution maximale des équations différentielles $y' - y\tan x = (1+\cos x)^{-1}$ et $y'\cos x + y\sin x = 1 + x$.

Proof. a) $y' - y\tan x = (1+\cos x)^{-1}$. Sur l'intervalle, $I_p =]-\frac{\pi}{2} + p\pi; \frac{\pi}{2} + p\pi[$ où $p \in \mathbf{Z}$, on trouve comme solution de l'équation homogène $y_0 = \frac{k}{\cos x}$. Ensuite on utilise la MVC et on obtient $k' = \frac{\cos x}{1+\cos x}$, que l'on intègre avec $t = \tan(x/2)$. Finalement on trouve comme solution générale $y(x) = \frac{x - \tan(x/2) + const}{\cos x}$.
b) $y'\cos x + y\sin x = 1 + x$. Sur l'intervalle $I_p =]-\frac{\pi}{2} + p\pi; \frac{\pi}{2} + p\pi[$ où $p \in \mathbf{Z}$, on trouve comme solution de l'équation homogène $y_0 = k\cos x$. Ensuite on utilise la MVC et on obtient $k' = \frac{1+x}{\cos x^2}$ et donc $y(x) = (1+x)\sin x + \cos x\ln(\cos x) + const\cos x$. □

(12) **(***)** Soit f une application continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ admettant une limite finie ℓ en $+\infty$. Montrer que toute solution de l'équation différentielle $y' + y = f(x)$ admet une limite finie en $+\infty$.

Proof. On connaît les solutions de l'équation homogène $Y(x) = \lambda e^{-x}$, on trouve donc une solution particulière par la MVC et au final $x \to e^{-x}[\int_0^x e^t f(t)dt] + const$ est solution pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$.
Supposons que $\lim f = 0$ et posons $h(x) = e^{-x}\int_0^x e^t f(t)dt$. Alors f est bornée sur $\mathbf{R}^+$ et donc $|f(x)| \leq A$, $\forall x \geq 0$. Si $\epsilon > 0$, il existe $X \geq 0$ tel que pour tout $t \geq X$, on ait $f(t) \leq \epsilon$. Mais $\forall x \geq 2X$, $h(x) \leq A\int_0^{x/2} e^{t-x} f(t)dt + \int_{x/2}^x e^{t-x}dt = Ae^{-x/2} + \epsilon$, qui est plus petit que 2ϵ pour x suffisamment grand. Donc

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0$$

Dans le cas général, si f a pour limite ℓ, on considère $f - \ell$ et on montre que h a pour limite ℓ. □

(13) **(***)** Existe-t-il des solutions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ de l'équation différentielle $y' + 2\sqrt{y} = 0$?

Proof. La fonction $\sqrt{y}$ doit être définie donc $y \geq 0 \Rightarrow y' = -2\sqrt{y} \leq 0$ donc y décroissante.
b) Soit $\delta = \inf\{x \in \mathbf{R}, y(x) = 0\}$.
$*$ si $\delta = -\infty$ alors $y = 0$ est la solution sur $\mathbf{R}$.
$*$ si $\delta = +\infty$ alors on doit avoir $y > 0$ sur $\mathbf{R}$: $x \to \sqrt{y(x)}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R} \Rightarrow y'(x) = -2\sqrt{y}$ est $\mathcal{C}^1$ et $y' < 0 \Rightarrow y$ est $\mathcal{C}^2$. Or $(y')^2 = (-2\sqrt{y})^2 \Rightarrow (y')^2 = 4y$. On en déduit que $y'(y'' - 2) = 0$. Mais $y' \neq 0$, d'où $y'' = 2$ sur $\mathbf{R}$ $\Rightarrow y = x^2 + bx + c > 0 \Rightarrow \Delta \leq 0 \Rightarrow b^2 = 4c$ mais alors $y(-\frac{b}{2}) = 0$ contradiction.
$*$ si $\delta \in \mathbf{R}$: alors $\forall x \geq \delta$, $y(\delta) = 0$ car y est décroissante et $y \geq 0$. Par definition de δ, $\forall x < \delta, y(x) > 0 \Rightarrow y'(x) < 0$ sur $]-\infty, \delta[$, $y'(x) = -2\sqrt{y} \Rightarrow y''(x) = 2$, d'où $y(x) = x^2 + bx + c$, soit $y(\delta) = 0$, $y'(\delta) = 0 \Rightarrow b = -2\delta$ et $c = \delta^2$.
Donc la solution finale est: $y(x) = (x - \delta)^2$ si $x \leq \delta$ et $y(x) = 0$ si $x \geq \delta$. □

(14) **(**)** Déterminer une solution maximale de l'équation différentielle $y'' + y = e^{-|x|}$.

Proof. Si $0 \notin I$, c'est facile, la solution maximale est $y(x) = \lambda\cos x + \mu\sin x + \frac{1}{2}e^{-|x|}$ où $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$.
Si $0 \in I$, on peut recoller en faisant attention et on obtient $y(x) = \lambda\cos x + \mu\sin x + \frac{1}{2}e^x$ si $x \leq 0$, $y(x) = \lambda\cos x + (\mu + 1)\sin x + \frac{1}{2}e^{-x}$ si $x \geq 0$. □

(15) **(**)** Déterminer une solution maximale de l'équation différentielle $xy'' - y' - 4x^3y = 0$ après avoir vérifié que $y(x) = e^{x^2}$ est solution.

Proof. Par la MVC, on trouve $\lambda'' = 4(-\frac{1}{t})\lambda'$ donc $\lambda' = Aexp(ln|t| - 2t^2) = Bte^{-2t^2}$ avec $A = \pm B$, donc $\lambda = \alpha e^{-2x^2} + \beta$ et $y(x) = \alpha e^{-x^2} + \beta e^{x^2}$ sur $\mathbf{R}$ avec $\alpha, \beta \in R$. □

(16) **(**)** Déterminer une solution maximale de l'équation différentielle $(1 + x^2)y'' + xy' - y = 0$ en effectuant le changement de variable $x = \operatorname{sh} t$.

Proof. La solution est $y(x) = \lambda(\sqrt{1 + x^2} + x) + \mu(\sqrt{1 + x^2} - x)$ sur $\mathbf{R}$ avec $\lambda, \mu \in R$. □

(17) **(**)** Déterminer les éventuelles solutions sur $\mathbf{R}$ de l'équation différentielle $x^2y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 1$ en posant $u = x^2y$. Quelle est leur classe?

Proof. Sur $I = \mathbf{R}^{*+}$ ou $J = \mathbf{R}^{*-}$, on peut définir y sous la forme $y = \frac{u}{x^2}$ et alors $u = x^2y$, $u' = x^2y' + 2xy$, $u'' = x^2y'' + 4xy' + 2y$, donc y est solution de l'équation différentielle initiale sur I et J si et seulement si $u'' - u = 1$, ce qui donne $y(x) = \frac{-1 + Ae^x x + Be^{-x}}{x^2}$, $\forall x \in I/J$.
Pour qu'une solution soit continue en 0, il faut que $A = 1$ et $B = 0$. Si on pose $f(x) = \frac{\cosh x - 1}{x^2}$ si $x \neq 0$ et $f(x) = \frac{1}{2}$ si $x = 0$ alors f de classe C^∞. C'est évidemment la seule solution de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$. □

(18) **(***)** Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$, monotone et admettant une limite finie ℓ en $+\infty$. Montrer que toute solution de l'équation différentielle $y'' + y = f(x)$ sont bornées sur $\mathbf{R}^+$ et que cette équation admet une unique solution ayant une limite finie en $+\infty$.

Proof. Cette équation admet pour solution $\phi(x) = \int_0^x f(t)\sin(x-t)dt + A\cos x + B\sin x$. Or, grâce à une integration par parties:

$$\int_0^x f(t)\sin(x-t)dt = f(x) - f(0)\cos x - \int_0^x f'(t)\cos(x-t)dt$$

et de plus, f est bornée sur $\mathbf{R}^+$. Comme f' est de signe constant, l'intégrale $\int_0^\infty |f'(t)|dt$ est bien définie au sens de Lebesgue et donc $f'(t)\cos(x-t)dt$ est integrable et

$$|\int_0^\infty f'(t)\cos(x-t)dt| \leq \int_0^\infty \int_0^\infty |f'(t)| = |f(0) - f(+\infty)|.$$

La fonction ϕ est donc bien bornée. De plus on peut écrire

$$\phi(x) = (A - f(0) - \int_0^x f'(t)\cos t dt)\cos x + (B - \int_0^x f'(t)\sin t dt)\sin x$$

donc pour que ϕ admette une limite finie en $+\infty$, il faut annuler les deux coefficients en $+\infty$, donc il faut que $A = f(0) + \int_0^\infty f'(t)\cos t dt$ et $B = \int_0^\infty f'(t)\sin t dt$. □

(19) **(**)** Déterminer la solution maximale de l'équation différentielle $y' = -y^2$ avec la condition initiale $y(0) = 1$.

Proof. Soit (I,u) une solution maximale de ce problème. On suppose que u s'annule sur I en un point x_0. En étudiant les solutions du pb de Cauchy: (2): $y'(x) = -y^2(x)$, $y(x_0) = 1$ on aboutit à une contradiction. En effet, par hypothèse: $u : I \to \mathbf{R}$ est une solution maximale du pb initial (1) $\Rightarrow \forall x \in I, u'(x) = -u^2(x), u(0) = 1$. De plus, on suppose que $\exists x_0 \in I$ tq $u(x_0) = 0 \Rightarrow \forall x \in I, u'(x) = -u^2(x), u(x_0) = 0, u(0) = 1$ donc u est est solution du pb (2) c'est-à-dire que: $u'(x) = -u^2(x), u(x_0) = 0$. De plus, ($\mathbf{R}$,0) est une solution évidente du pb (2). En effet: $\forall x \in \mathbf{R}$, $u(x) = 0 \Rightarrow u(x_0) = 0$; $u'(x) = 0$ et $u^2(x) = 0$ donc $u'(x) = -u^2(x)$. Ici: $f(x, y(x)) = -y^2(x)$. $(x, y(x)) \to y(x) \to y^2(x) \to -y^2(x)$ est C^1 comme composée de 3 fonctions C^1, d'ou f est C^1 sur $\mathbf{R} \times \mathbf{\Omega}$, on peut donc appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz, il y a unicité de la solution maximale et donc: si (I,u) solution maximale et on a vu que ($\mathbf{R}$,0) est une solution alors $\mathbf{R} \subset I$ cad $I = \mathbf{R}$ et $u = 0$ sur $\mathbf{R}$ c'est-à-dire que $\forall x \in \mathbf{R}$, $u(x) = 0$, en particulier $u(0) = 0$ impossible car cela contredit $u(0) = 1$. □

(21) **(**)** Trouver toutes les applications $f : \mathbf{R}_+^* \mapsto \mathbf{R}$ dérivables et vérifiant $f'(t) = f(1/t)$ pour tout $t \in \mathbf{R}_+^*$.

Proof. Si on pose $z(t) = f(e^t)$, alors $z'(t) = e^t f'(e^t)$ et $z''(t) = e^t f'(e^t) + e^{2t} f''(e^t)$. D'où $z''(t) - z'(t) = e^{2t} f''(e^t)$. Mais pour tout $x > 0$, $f''(x) = f'(\frac{1}{x})(-\frac{1}{x^2}) \Rightarrow x^2 f''(x) = -f'(\frac{1}{x})$ et comme $f'(\frac{1}{x}) = f(x)$ alors $x^2 f''(x) = -f(x)$. On trouve ainsi que z vérifie l'équation $z''(t) - z'(t) + z(t) = 0$, dont la solution est $z(t) = e^{\frac{1}{2}t}(\lambda \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + \mu \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t)$. On en déduit alors f en écrivant que $f(t) = z(\ln t)$ pour $t > 0$. □