Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2008 – 2009

Analyse S4

Examen final, juin 2009

Examen de 3h00. Tout document ou calculatrice est interdit.

Vous pouvez traiter les questions dans l'ordre que vous désirez. Beaucoup de questions peuvent être résolues même si les précédentes n'ont pas été traitées...

1. **(2 pts)** Soit $I = \int_\Delta \frac{dxdy}{(1+x^2-y)^2}$ avec $\Delta = \{(x,y) \in [0,1]^2,\ y < x^2\}$. Tracer Δ et calculer I.
   Question facultative (2pts) Montrer que la fonction $f(x,y) = y - x^2$ est mesurable sur $\mathbf{R}^2$ et en déduire que Δ est mesurable.

2. **(3 pts)** Soit la série entière $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{3})^{\ln n} x^n$. Déterminer le rayon de convergence de cette série, puis l'ensemble de définition de S et de S' (on rappelle que $\ln 3 \simeq 1.09$).

3. **(10 pts)** Soit l'équation différentielle:
$$(E) \qquad 4x\, y''(x) - 2\, y'(x) + 9x^2\, y(x) = x^2.$$
   (a) Soit la fonction $f(x) = |x|^{3/2}$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ mais pas de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}$. Tracer sommairement f.
   (b) Déterminer les ensembles sur lesquels on peut rechercher des solutions maximales de (E)?
   (c) Soit y une solution de l'équation homogène (EH) associée à (E). Pour $x > 0$, on pose $y(x) = z(x^{3/2})$. Montrer que z est alors solution de l'équation différentielle $z''(t) = -z(t)$. Déterminer l'ensemble des solutions de cette équation et en déduire l'ensemble des solutions de (EH) telles que $x > 0$.
   (d) Déterminer la solution de (EH) telle que $y(0) = 1$ et $y(x_0) = 0$, avec $x_0 = (\frac{\pi}{2})^{2/3}$. Donner le développement en série entière de la solution en précisant son domaine de validité.
   (e) Déterminer l'ensemble des solutions de (E) sur $]0, \infty[$.
   (f) On suppose qu'il existe une solution S de (EH) développable en série entière sur $]-R, R[$ où $R > 0$, soit $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, où (a_n) est une suite de réels. Déterminer alors une relation de récurrence vérifiée par (a_n), puis en déduire l'expression générale des solutions de (E) développable en séries entières sur $]0, \infty[$. Montrer que toute fonction de l'ensemble des solutions de (E) ne s'écrit pas forcément comme une série entière. Pourquoi?

4. **(11 pts)** Soit la fonction $I(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos(x\,t)}{1+t^2}\,dt$.

(a) Montrer que l'ensemble de définition de I est $\mathbf{R}$.

(b) Montrer que I est paire et continue sur $\mathbf{R}$.

(c) Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $x\,I(x) = 2\,J(x)$ où $J(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{t\,\sin(x\,t)}{(1+t^2)^2}\,dt$ (on n'oubliera pas de montrer que cette dernière intégrale existe). En déduire $\lim_{x\to+\infty} I(x)$.

(d) Montrer que J est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $J'(x) = I(x) - K(x)$ où $K(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos(x\,t)}{(1+t^2)^2}\,dt$.

(e) Montrer que K est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $K'(x) = -J(x)$.

(f) Déduire de ce qui précède que K est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}$, I de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\infty[$, puis J et I de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,\infty[$.

(g) Montrer que pour tout $x > 0$, $x\,I''(x) + 2\,I'(x) = 2J''(x)$, puis que $x\,I''(x) = x\,I(x)$. En déduire que $I(x) = \dfrac{\pi}{2}\,e^{-x}$ pour $x > 0$, puis sans calcul donner l'expression de I pour $x < 0$ et enfin pour $x \in \mathbf{R}$.