Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2008 – 2009

Analyse S4

Examen final, juin 2009

Examen de 3h00. Tout document ou calculatrice est interdit.

Vous pouvez traiter les questions dans l'ordre que vous désirez. Beaucoup de questions peuvent être résolues même si les précédentes n'ont pas été traitées...

1. **(2 pts)** Soit $I = \displaystyle\int_\Delta \frac{dxdy}{(1+x^2-y)^2}$ avec $\Delta = \{(x,y) \in [0,1]^2,\ y < x^2\}$. Tracer Δ et calculer I.
   Question facultative (2pts) Montrer que la fonction $f(x,y) = y - x^2$ est mesurable sur $\mathbf{R}^2$ et en déduire que Δ est mesurable.

   Proof. Tracé=**(0.5pts)**. Avec le Théorème de Fubini (que l'on peut appliquer car on intègre une fonction continue sur l'adhérence de Δ), on a $I = \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} \frac{dy}{(1+x^2-y)^2} \right) dx$. Mais une primitive de $(a-y)^{-2}$ est $(a-y)^{-1}$ donc $I = \int_0^1 \left[(1+x^2-y)^{-1}\right]_0^{x^2} dx = \int_0^1 dx - \int_0^1 (1+x^2)^{-1} dx = 1 - \mathrm{Arctan}(1) = 1 - \frac{\pi}{4}$. **(1.5pts)**
   La fonction $f(x,y) = y - x^2$ est mesurable car continue sur $\mathbf{R}^2$. Or $f^{-1}(]-\infty, 0[) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2,\ y < x^2\}$ est un ensemble mesurable de $\mathbf{R}^2$ car $]-\infty, 0[$ est un pavé de $\mathbf{R}$. Mais comme $[0,1]^2$ est un pavé de $\mathbf{R}^2$ donc est mesurable, et comme $\Delta = f^{-1}(]-\infty,0[) \cap [0,1]^2$, alors Δ est mesurable comme intersection de 2 ensembles mesurables **(2pts)**. □

2. **(3 pts)** Soit la série entière $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{3})^{\ln n} x^n$. Déterminer le rayon de convergence de cette série, puis l'ensemble de définition de S et de S' (on rappelle que $\ln 3 \simeq 1.09$).

   Proof. On a $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{\ln n} = e^{-\ln 3 \cdot \ln n} = n^{-\ln 3}$. Par la règle de Cauchy, $a_n^{1/n} = e^{-\ln 3 \cdot \frac{\ln n}{n}}$ donc $a_n^{1/n} \to 1$ quand $n \to \infty$: le rayon de convergence de S est 1 **(0.5pts)**. Donc S est définie sur $]-1,1[$ et même de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ **(0.5pts)**.
   De plus $S(1)$ existe car $S(1) = \sum n^{-\ln 3}$ est une série de Riemann avec $\alpha = \ln 3 > 1$; de même $S(-1)$ existe d'après le Théorème de comparaison des séries car $\left|n^{-\ln 3}(-1)^n\right| \leq n^{-\ln 3}$ pour tout $n \geq 1$. donc l'ensemble de définition de S est exactement $[-1,1]$ **(1pt)**.
   Enfin, $S'(1) = \sum n^{1-\ln 3}$ diverge (comme série de Riemann) et $S'(-1) = \sum n^{1-\ln 3}(-1)^n$ converge comme série alternée ($(n^{1-\ln 3})_n$ est bien positive, décroissante et tend vers 0). Donc l'ensemble de définition de S' est $[-1,1[$ **(1pt)**. □

3. **(11 pts)** Soit l'équation différentielle:
   $$(E) \qquad 4x\, y''(x) - 2\, y'(x) + 9x^2\, y(x) = x^2.$$
   (a) Soit la fonction $f(x) = |x|^{3/2}$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ mais pas de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}$. Tracer sommairement f.
   (b) Déterminer les ensembles sur lesquels on peut rechercher des solutions maximales de (E)?
   (c) Soit y une solution de l'équation homogène (EH) associée à (E). Pour $x > 0$, on pose $y(x) = z(x^{3/2})$. Montrer que z est alors solution de l'équation différentielle $z''(t) = -z(t)$. Déterminer l'ensemble des solutions de cette équation et en déduire l'ensemble des solutions de (EH) telles que $x > 0$.

(d) Déterminer la solution de (EH) telle que $y(0) = 1$ et $y(x_0) = 0$, avec $x_0 = (\frac{\pi}{2})^{2/3}$. Donner le développement en série entière de la solution en précisant son domaine de validité.

(e) Déterminer l'ensemble des solutions de (E) sur $]0, \infty[$.

(f) On suppose qu'il existe une solution S de (EH) développable en série entière sur $]-R, R[$ où $R > 0$, soit $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, où (a_n) est une suite de réels. Déterminer alors une relation de récurrence vérifiée par (a_n), puis en déduire l'expression générale des solutions de (E) développable en séries entières sur $]0, \infty[$. Montrer que toute fonction de l'ensemble des solutions de (E) ne s'écrit pas forcément comme une série entière. Pourquoi?

Proof. (a) Il est clair que pour $x > 0$, $f(x) = x^{3/2}$ donc f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, \infty[$ et pour $x < 0$, $f(x) = (-x)^{3/2}$ donc f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty, 0[$. Le problème est en 0. La fonction f est clairement continue en 0 ($f(0) = 0$). De plus $f(x)/x = signe(x)\,|x|^{1/2}$, donc $f(x)/x \to 0$ quand $x \to 0$: la fonction f est bien dérivable en 0, et comme $f'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2}$ pour $x > 0$ et $f'(x) = -\frac{3}{2}(-x)^{1/2}$ pour $x < 0$, $\lim_{x\to 0} f'(x) = f'(0) = 0$: f est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ **(1pt)**. Enfin, $f'(x)/x = \frac{3}{2}|x|^{-1/2}$ donc $\lim_{x\to 0} f'(x)/x = \infty$: f' n'est pas dérivable en 0 et f n'est donc pas de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}$ (mais seulement sur $\mathbf{R}^*$) **(1pt)**. Tracé=**(0.5pts)**

(b) On peut encore écrire (E) sous la forme: $4\,y''(x) - \frac{2}{x}y'(x) + 9\,x\,y(x) = x$, et les fonctions $x \to -\frac{2}{x}$, $x \to 9\,x$ et $x \to x$ étant continues sur $]-\infty, 0[$ et $]0, \infty[$, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, on pourra rechercher des solutions distinctement sur chacun de ces ensembles **(0.5pts)**.

(c) L'équation homogène (EH) est: $4\,y''(x) - \frac{2}{x}y'(x) + 9\,x\,y(x) = 0$. Si on pose $y(x) = z(x^{3/2})$ pour $x > 0$, alors $y'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2}z'(x^{3/2})$ et $y''(x) = \frac{3}{4}x^{-1/2}z'(x^{3/2}) + \frac{9}{4}x\,z''(x^{3/2})$. Si y est solution de (EH) on en déduit que: $3\,x^{-1/2}z'(x^{3/2}) + 9\,x\,z''(x^{3/2}) - 3\,x^{-1/2}z'(x^{3/2}) + 9\,x\,z(x^{3/2}) = 0$, soit encore $9\,x\,z''(x^{3/2}) + 9\,x\,z(x^{3/2}) = 0$. Comme $x > 0$, en posant $t = x^{3/2}$, on en arrive à l'équation $z''(t) + z(t) = 0$ **(1.5pts)**.

On trouve que les racines de l'équation caractéristique associée à cette équation sont i et $-i$, donc les solutions de cette équation sont de la forme: $z(t) = \lambda\cos t + \mu\sin t$, avec $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$. Avec $t = x^{3/2}$, on en déduit que l'ensemble des solutions de (EH) dans $]0, \infty[$ est $\left\{y(x) = \lambda\cos(x^{3/2}) + \mu\sin(x^{3/2}),\ (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2\right\}$ **(1pt)**.

(d) La solution telle que $y(x_0) = 0$ et $y(0) = 1$ est $y(x) = \cos(x^{3/2})$ **(0.5pt)**. On connaît le développement en série entière: $\cos t = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^{2k}}{(2k)!}$ pour tout $t \in \mathbf{R}$. En remplaçant par $t = x^{3/2}$, on obtient que $\cos(x^{3/2}) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{3k}}{(2k)!}$ pour tout $x > 0$ **(1pt)**.

(e) On remarque que $y_0(x) = \frac{1}{9}$ est une solution particulière de (E). On en déduit donc que l'ensemble des solutions de (E) est: $\left\{\frac{1}{9} + \lambda\cos(x^{3/2}) + \mu\sin(x^{3/2}),\ (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2\right\}$ **(1pt)**.

(f) Soit $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sur $]-R, R[$. Alors $y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ et $y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$. Donc $xy''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)a_{n+1}x^n$ et $x^2y(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n$. On en déduit que $4x\,y''(x) - 2\,y'(x) + 9x^2\,y(x) = 4a_2x - 2a_1 + \sum_{n=2}^{\infty}(4n(n+1)a_{n+1} - 2(n+1)a_{n+1} + 9a_{n-2})x^n$. Ainsi, du fait de l'unicité du développement en série entière, si y est solution de (EH), alors pour les termes de degrés 0 et 1, $a_1 = a_2 = 0$ et on en arrive à $2n(2n-3)a_n = -9\,a_{n-3}$ pour tout $n \geq 3$. Par itération, on voit que tous les indices de la forme $3n+1$ ou $3n+2$ sont nuls, et $a_{3n} = -\frac{1}{2n(2n-1)}\,a_{n-3}$ donc $a_{3n} = \frac{(-1)^n}{2n!}\,a_0$. Ceci montre que $y(x) = a_0\cos(x^{3/2})$ **(2pts)**.

La fonction $\sin(x^{3/2})$ n'est pas développable en série entière, car elle n'est pas dérivable deux fois en 0 (du fait que la fonction est équivalente à $x^{3/2}$ en 0). Il est donc qu'elle ne puisse pas être obtenue comme solution développable en série entière **(1pt)**. □

4. **(11.5 pts)** Soit la fonction $I(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(x\,t)}{1+t^2}dt$.

(a) Montrer que l'ensemble de définition de I est $\mathbf{R}$.

(b) Montrer que I est paire et continue sur $\mathbf{R}$.

(c) Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $x\,I(x) = 2\,J(x)$ où $J(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{t\,\sin(x\,t)}{(1+t^2)^2}dt$ (on n'oubliera pas de montrer que cette dernière intégrale existe). En déduire $\lim_{x\to+\infty} I(x)$.

(d) Montrer que J est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $J'(x) = I(x) - K(x)$ où $K(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(x\,t)}{(1+t^2)^2}dt$.

(e) Montrer que K est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $K'(x) = -J(x)$.

(f) Déduire de ce qui précède que K est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}$, I de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \infty[$, puis J et I de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, \infty[$.

(g) Montrer que pour tout $x > 0$, $x\,I''(x) + 2\,I'(x) = 2J''(x)$, puis que $x\,I''(x) = x\,I(x)$. En déduire que $I(x) = \dfrac{\pi}{2}\,e^{-x}$ pour $x > 0$, puis sans calcul donner l'expression de I pour $x < 0$ et enfin pour $x \in \mathbf{R}$.

Proof. (a) La fonction $f(x,t) = \frac{\cos(x\,t)}{1+t^2}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}^2$ comme produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}^2$. De plus, $\left|\frac{\cos(x\,t)}{1+t^2}\right| \le \frac{1}{1+t^2}$ pour tout $(x,t) \in \mathbf{R}^2$, et $\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2}$ existe ($=$ Arctan$(+\infty) = \pi/2$). Donc d'après le Théorème de comparaison des intégrales impropres, F existe pour tout $x \in \mathbf{R}$ **(1pt)**.
(b) Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $I(-x) = \int_0^\infty \frac{\cos(-x\,t)}{1+t^2}dt = \int_0^\infty \frac{\cos(x\,t)}{1+t^2}dt = I(x)$: la fonction I est bien paire **(0.5pt)**.
On a vu que la fonction $f(x,t) = \frac{\cos(x\,t)}{1+t^2}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}^2$, et qu'elle est dominée par la fonction $g_0(t) = \frac{1}{1+t^2}$ qui est intégrable sur $]0,\infty[$. Donc d'après le Théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre, I est continue sur $\mathbf{R}$ **(1pt)**.
(c) Avec une intégration par parties, $xI(x) = \left[\sin(xt)\frac{1}{1+t^2}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{2t\,\sin(x\,t)}{(1+t^2)^2}dt = 2\,J(x)$. Cette intégration par parties est possible car on montre que J existe avec le Théorème de comparaison des intégrales impropres, du fait que $\left|\frac{2t\,\sin(x\,t)}{(1+t^2)^2}\right| \le \frac{1}{1+t^2}$ pour tout $(x,t) \in \mathbf{R}^2$, et $\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2}$ existe **(1pt)**.
Comme pour $x > 0$, $I(x) = 2J(x)/x$ et comme $|J(x)| \le \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$ pour tout $x > 0$, on en déduit que que $I(x) \le \pi/x$ pour $x > 0$ et donc $\lim_{x\to\infty} I(x) = 0$ **(1pt)**.
(d) La fonction $j(x,t) = \frac{t\,\sin(x\,t)}{(1+t^2)^2}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}^2$. De plus, $|j(x,t)| \le \frac{1}{2}g_0(t)$ pour tout $(x,t) \in \mathbf{R}^2$, et comme $\frac{\partial}{\partial x}j(x,t) = \frac{t^2\,\cos(x\,t)}{(1+t^2)^2}$, on a $\left|\frac{\partial}{\partial x}j(x,t)\right| \le g_0(t)$ pour tout $(x,t) \in \mathbf{R}^2$. Ainsi comme g_0 est intégrable sur $[0,\infty[$, on a bien toutes les hypothèses du Théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre qui sont vérifiées et on a J qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ avec $J'(x) = \int_0^\infty \frac{t^2\,\cos(x\,t)}{(1+t^2)^2}dt$ **(1pt)**.
Il est clair que $J'(x) = \int_0^\infty \frac{t^2\,\cos(x\,t)}{(1+t^2)^2}dt = \int_0^\infty \frac{(t^2+1)\,\cos(x\,t)}{(1+t^2)^2}dt - \int_0^\infty \frac{\cos(x\,t)}{(1+t^2)^2}dt = I(x) - K(x)$. On montre toujours de la même manière que K existe **(0.5pts)**.
(e) La fonction $k(x,t) = \frac{\cos(x\,t)}{(1+t^2)^2}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}^2$. De plus, $|k(x,t)| \le g_0(t)$ pour tout $(x,t) \in \mathbf{R}^2$, et comme $\frac{\partial}{\partial x}k(x,t) = -\frac{t\,\sin(x\,t)}{(1+t^2)^2}$, on a $\left|\frac{\partial}{\partial x}k(x,t)\right| \le \frac{1}{2}g_0(t)$ pour tout $(x,t) \in \mathbf{R}^2$. Ainsi comme g_0 est intégrable sur $[0,\infty[$, on a bien toutes les hypothèses du Théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre qui sont vérifiées et donc K qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ avec $K'(x) = -\int_0^\infty \frac{t\,\sin(x\,t)}{(1+t^2)^2}dt = -J(x)$ **(1pt)**.
(f) Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $K'(x) = -J(x)$ et J est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$: K' est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$, soit K de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}$ **(0.5pts)**.
Comme $xI(x) = 2J(x)$, on a $I(x) = 2J(x)/x$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\infty[$ car J est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ **(0.5pts)**.
De la relation $J'(x) = I(x) - K(x)$ on déduit que J est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,\infty[$ car I et K sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\infty[$.
Enfin, à nouveau en utilisant $I(x) = 2J(x)/x$, on en déduit que I de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,\infty[$ car on vient de voir que J l'est également **(0.5pts)**.
(g) Pour $x > 0$, on a $J''(x) = I'(x) - K'(x)$ et comme $K'(x) = -J(x)$, on a donc $J''(x) = I'(x) + J(x)$. Mais comme $J(x) = \frac{1}{2}xI(x)$, on a $J'(x) = \frac{1}{2}(xI'(x) + I(x))$ et $J''(x) = \frac{1}{2}(xI''(x) + 2I'(x))$. Donc en remplaçant, on obtient $\frac{1}{2}(xI''(x) + 2I'(x)) = I'(x) + \frac{1}{2}xI(x)$, soit $x(I''(x) - I(x)) = 0$ **(1.5pts)**.
Comme on travaille pour $x > 0$, cette dernière équation revient à $I''(x) - I(x) = 0$ dont la solution générale est $I(x) = \lambda\,e^x + \mu\,e^{-x}$ avec $(\lambda,\mu) \in \mathbf{R}^2$. On sait que $I(0) = \frac{\pi}{2}(=$ Arctan$(+\infty))$ et que $\lim_{x\to\infty} I(x) = 0$. Donc la seule possibilité est que $I(x) = \frac{\pi}{2}e^{-x}$ pour $x > 0$ **(1.5pts)**.
Par parité on en déduit que pour $x < 0$, $I(x) = \frac{\pi}{2}e^x$, puis que $I(x) = \frac{\pi}{2}e^{-|x|}$ pour $x \in \mathbf{R}$ **(0.5pts)**. □