Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2008 – 2009

Analyse S4

Examen de septembre 2009

Examen de 3h00. Tout document ou calculatrice est interdit.

Vous pouvez traiter les questions dans l'ordre que vous désirez. Beaucoup de questions peuvent être résolues même si les précédentes n'ont pas été traitées...

1. **(13 pts)** Soit la série entière:
$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2 + 2\,n}\, x^n.$$
   (a) Déterminer le rayon de convergence de S. En déduire le domaine de définition $\mathcal{D}_S$ de S (étudier précisément les bornes de cet ensemble dans $\mathbf{R}$).
   (b) Déterminer le plus grand ensemble ouvert $I \subset \mathbf{R}$ sur lequel S est de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que S' n'est pas définie en $\frac{1}{2}$.
   (c) Donner le développement en série entière de $\ln(1-2x)$ en précisant l'ensemble sur lequel ce développement est valable. En déduire que pour tout $x \in I$, $x\,S'(x) + 2\,S(x) = -\ln(1-2x)$.
   (d) Soit l'équation différentielle
$$(E) \qquad x\,y'(x) + 2\,y(x) = -\ln(1-2x).$$
   Déterminer l'ensemble des solutions de (EH) équation homogène associée à (E) sur $]0, \frac{1}{2}[$.
   (e) Montrer qu'une solution particulière de (E) est la fonction $y_0(x) = \frac{1}{8x^2}(4x^2-1)\ln(1-2x) - \frac{x+1}{4x}$. En déduire l'ensemble des solutions de (E) puis la forme explicite de $S(x)$ pour $x \in]0, \frac{1}{2}[$.

2. **(15 pts)** Soit la fonction $f(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-xt}\,\frac{\sin^2 t}{t^2}dt$.
   (a) Montrer que l'ensemble de définition de f est $[0, \infty[$.
   (b) Montrer que f est continue sur $[0, \infty[$.
   (c) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, \infty[$.
   (d) Montrer que pour tout $x > 0$, $f''(x) = \dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-xt}\,\cos(2t)dt$. En utilisant une double intégration par parties, montrer que pour tout $x > 0$, $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-xt}\,\cos(2t)dt = \frac{x}{x^2+4}$.
   (e) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$. En déduire que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{2}\ln x - \dfrac{1}{4}\ln(x^2+4)$.
   (f) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. En déduire que pour tout $x > 0$, $f(x) = \dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{x^2}{x^2+4}\right) - \arctan\left(\dfrac{x}{2}\right) + \dfrac{\pi}{2}$.
   (g) En déduire (en justifiant) que $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}dt = \frac{\pi}{2}$. A l'aide d'une intégration par parties, en déduire également que $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{2}$.